数と計算や数量関係と写像

算数で学習する数と計算、割合、単位量あたりの大きさといった内容は、実は一種の“写像”(mapping)なのかもしれない。算数の内容を語るのに写像を持ち出すと、「鶏を割くにいずくんぞ牛刀を用いん」と言われそうであるが、ただ、そう捉えることで、以下のようなことが可能になる、という利点もあると考える。

・それらの内容の難しさを適切に見つめること

・その難しさを考慮に入れた上で支援のあり方を考えること

つまり、数が写像であるとか、数の計算は写像の和や合成である、と考えてみると、数自体やその計算が実は難しいものだと納得しやすい。そして、そうした難しいものであるならば、それに応じた支援を考えるということになる。

こうした利点を得るために、以下では、上の内容を写像として捉えることを試みてみる。

1．数と計算

数を量の倍変換と捉えることができるが、数は変換であるから、写像ということになる。始域は、長さの集合、重さの集合のように、併せることが可能な一種類の量からなる集合であり、終域も同じ量の集合である。つまり、集合の要素であるある量を、同じ集合の別の量に変えるような写像が数となる。

数の大きさは、ある量をどの程度、大きくしたり小さくしたりするかの、変換効率のようなものである。数直線は、一倍変換との比較でそれぞれの数の変換効率を示すサンプル集のようなものと言えよう。

数のたし算は写像の和、数のかけ算は写像の合成ということになる。関数の和や合成関数が、高校数学の後の方になってようやく出てくることを考えれば、写像の和や合成も同程度に難しく、したがって数の計算も、その正体は同程度に難しいのかもしれない。

数が写像であり、数の計算が写像の演算だとすれば、数自体やその計算の正体を小学生が把握することは、かなり難しいと言えよう。したがって、子どもたちに説明してその“意味”をよく理解してもらう、というよりも、皆で数について語っているうちに、数があるような感覚になる、ことを目指すべきなのかもしれない。計算練習の中で、演算の感触をつかむことが大切なのかもしれない。

ブロックの個数やテープの長さといった量を用いて、数やその計算を説明することも多い。説明としてもちろん効果はあるであろうが、しかしその見えている量自体は数やその計算ではない。量を動かしている操作こそが、数や計算なのだと考えられる。数や計算の捉え方によっては、説明の際に、強調したり、学習者に目を向けてもらったりする個所を、誤ることになろう。

２．割合

割合は、数の場合と同様に併せることが可能な一種類の量からなる集合を始域とするが、終域は(正の)実数の集合となるような写像 φ と考えられる。ある量 q を「１とする」ことは、$\varphi(q)=1$ と決めることに当たる。量 p がいくつにあたるかは、$\varphi(p)$の値を決めることである。ここで φ が線形であると仮定すれば、もしもある実数 a が存在して $p=aq$ と表せるならば、$\varphi(p)=\varphi(aq)=a\varphi(q)=a\times 1=a$ となる。逆に言えば、量 q を「１とする」ことは線形写像 φ を選ぶことでもある。

割合の学習では、p と q の比例関係には言及されるものの、肝心の φ の線形性は忘れられているように思われる。割合を写像として捉えることで、写像の性質である線形性を浮き彫りにすることが可能となろう。

また２組の量のペア(q, p)と(q', p')を割合を用いて比較する場合、$q\neq q'$であれば $\varphi(q)=1$ の場合には $\varphi(q')\neq 1$ となる。したがって、(q', p')の関係を割合で表現するためには、φ とは異なる線形写像 ψ で $\psi(q')=1$ となるものを用いることになる。したがって(q, p)と(q', p')を割合を用いて比較することは、$\varphi(p)$と $\psi(p')$の値を用いて比較することを意味する。つまり、割合による比較は異なる写像の値を比べていることになる。

なお φ は線形であるから、$\varphi(p_1)+\varphi(p_2)=\varphi(p_1+p_2)$となり、同じ文脈で考えている、つまり同じ基準量 q を用いている範囲では、割合の加法も自然に考えられる。

このように捉えると、割合自体については、量の値と割合の値の比例関係(上述の線形性)を、学習の中で明確にする必要性が見えてくる。また割合を用いた比較は異なる写像を用いた比較だと捉えると、そうした比較の仕方の正当化は、意外に難しいのではないか、ということもわかってくる。

３．単位量あたりの大きさ

単位量あたりの大きさは、ある量の集合から別の量の集合への線形写像と捉えることができる【補足参照】。時間の集合から距離の集合への写像は速さとなり、面積の集合から人数の集合への写像は人口密度となる。これは、算数の教科書で２本の数直線の対応として表現されていることに当たる。

始域の量のうち単位となる量 q (1 分とか 1 m^2)があり、他の量 p はある実数 a を用いて $p=aq$ と書けるとする。線形写像 Φ について $\Phi(p)=\Phi(aq)=a\Phi(q)$となるので、$\Phi(q)$がいくつか、つまり始域の単位量 q は終域のどの量に写るかがわかれば、他の量 $p=aq$ の行先もわかることになる。ここから始域の単位量に対応する終域の量が、二量の間の写像を決定することとなり、サンプル的に写像全体の様子を反映していることになる。これにより、$\Phi(q)$の値により写像 Φ 全体を代表させることが可能となっている。とは言え、q の値 $\Phi(q)$と写像 Φ とは異なる。

関数の和を考えた時のことを思い出すと、２つの単位量あたりの大きさ Φ、Ψ

に対して、同じ量pを用いて$(\Phi+\Psi)(p)=\Phi(p)+\Psi(p)$と決めることができるような文脈においては、単位量あたりの大きさの和を考えることもできよう。例えば、同じ単位時間1秒を使い、その間に進んだ距離を合算することが自然であるような文脈であれば、単位量あたりに進む距離、つまり速さをたすことも自然な操作だと考えられる。

４．測定

測定は量の集合から(正の)実数への写像となる。測定である写像μの量pの測定値$\mu(p)$に対して、pとpを併せた量の測定値$\mu(p+p)$の値が$\mu(p)+\mu(p)$となるようにしたい等と考えると、この写像も線形となる。また$\mu(p)=1$となる量qが測定μでの単位となっている。

以上より数は同種の量の集合間の写像、割合と測定はある量の集合から実数への写像、単位量あたりの大きさは異なる量の集合間の写像、ということになる。また、数と単位量あたりの大きさは終域も量の集合であり、写像自体が数であり、単位量あたりの大きさであると捉えているのに対し、割合と測定は終域は実数の集合であり、写像はある基準量や単位による割合を求める操作や測定の操作となっている。ある量pに対する割合や測定値はそのpに対する写像の値である$\varphi(p)$や$\mu(p)$となるが、これは基準量を量pへ変換する操作を表すので、倍変換である数になることで議論は整合している。

孔子も最後は「前言は之に戯れしのみ」と言われたそうなので、上のこともそう言ってもらえるとよいのであるが。やはり上のような話は受け入れられないという方は、よりわかりやすい説明を考案してみて下さい。ただし、量と数の関係は明確にした上で。

【算数･数学教育におけるIAQ に戻る】

【補足】

二種類の量の集合をQ_1とQ_2とし、Q_1の単位量q_0による測定をμとする。ここでQ_1の量qに対応するQ_2の量をbとする(例えば3時間で60 km走るという場合であればqは3時間、bは60 kmとなる)。この時、Q_2の割合φで$\varphi(b)=\mu(q)$となるものを選ぶ(先の例なら60 kmの割合が3となる割合なので、20 kmをもとの量とした割合がφになる)。

そしてQ_1からQ_2への写像Φを

$$\Phi=\varphi^{-1}\circ\mu、\Phi(q)=(\varphi^{-1}\circ\mu)(q)$$

で決めると、このΦが単位量あたりの大きさとなる。教科書の学習も考え方としてはこのような形になっている。