

証明の対象

数学で何かを証明するという場合、少なくとも中学校や高等学校の数学の範囲であれば、基本的には次のようなことになるのではないだろうか。

- (a) ある**数学的对象**がある性質を本当に持つのか、あるいはなぜそうした性質を持ちうるのかを明らかにする。
- (b) いくつかの**数学的对象**から構成される場面において、ある現象が本当に生じているのか、あるいはなぜそうした現象が生じるのかを明らかにする。

(a)であればある対象のことを調べるのであるから、当然、その**数学的对象**について生徒が探求し、理解を深めることが可能になっていることが前提となろう。また(b)の場合は、問題の場面は**数学的对象**がある仕方で組み合わせられてきているので、場面を構成する各対象に加えて、それらが**組み合わせられている仕方**についてもよく理解し、場面に隠された**ある種の構造や仕組み**を浮き彫りにすることで、その構造や仕組みから**当該の現象が生じるメカニズム**を説明することになろう。

つまり証明すべき対象は、問題の対象がある性質を持つという**数学的事実**や、問題の場面である現象が生じるという**数学的事実**であるが、**証明を考える**際に求められるのは、**数学的对象や場面をより深く理解**することであるならば、その理解の対象は問題の対象や場面そのものだということになる。また、理解を深めるには**対象に働きかけ**、新たにわかることを探る(probe)ことが大切だとすれば、その対象や場面は探る人が働きかける対象でもある。

逆に言えば、証明を考える場合、**働きかけ理解を深めるべき対象**について、生徒が十分な“手触り”や“リアリティ”を有することが必要となろう。ぼんやりとして、リアリティを感じていない何かに対して、自分から手は出しにくいし、またそれをよく理解しようとも思えないからである。

生徒が証明を考えるのが苦手ということを話題にする時、証明の際に生徒が向き合う対象のリアリティのようなものを、私たちは問題にしてきていただろうか。また、それらに対する手触りを高めるような支援を行っていただろうか。「**全ての平行四辺形**で…」といった言い方をした場合に、問題となっている対象は、生徒に感じてもらえているであろうか。

証明ではわかっていることだけを用いて、演繹的な思考を行うことが求められる。生徒が証明すべきことを証明の中で用いたり、証明として**適切な思考**ができなかったりする場合もあるかもしれない。その場合に、証明らしい思考の仕方を生徒に指導することももちろん大切であろう。しかし、そうした独特の思考の仕方をするのも、上の**対象の性格**に依るものなのではないだろうか。例えば、**数学的对象**が定義で規定されるものにすぎず、それ以上でもそれ以下でもないからこそ、私たちは定義からのみわかることを積み重ねるしかないであろう。ま

た、証明で示した数学的事実が一般性を持つということも、その性格との関わりで言えることなのではないだろうか。

私たち教師にしても、日常生活の中では数学の論証のような思考をすることはほとんどないであろうし、また自分の考えが普遍的、一般的に成り立つと主張することも普通はしないであろう。そう考えれば、数学での思考の仕方は、数学の中で向き合う対象の性格に大きく依存していると考えられるのではないだろうか。

そうだとすれば、証明での思考の仕方を生徒がある意味で“自然な”ものと感じてくれるためにも、証明で私たちが向き合っている対象が、どのような対象かについて、生徒が捉えていてくれることが大切になってくる。逆に、対象をそのように捉えられない生徒にとっては、証明に独特な思考の仕方をする必要性が感じられにくくなる。向き合っている対象の性格のゆえにそうした思考の仕方が必要となる、と生徒が感じてくれなければ、なぜそうした思考をするのかはよくわからなくなり、その思考の仕方はとにかく従うべき儀式にすぎなくなってしまう。そうなれば、自分の思考の仕方が証明として適切なのかを生徒は自身で判断することが難しくなり、儀式の権威者からお墨付きをもらうしかなくなってしまふ。

生徒が証明に主体的に取り組み、自分の思考の適切さを自分で判断し、必要があれば修正できるようにするためにも、証明の際に生徒が向き合う対象の性格を十分に理解し、それらに対してある程度のリアリティを持ってもらうことが必要なのではないだろうか。生徒の論理的思考を、私たちは彼らが向き合うべき対象をどう捉えているのか、という観点から検討してきているであろうか。

【算数・数学教育における IAQ に戻る】