

かけ算の順序（３）

国際単位系の文書第 2.1 節は「量の単位の定義」であり、次のように始まっている。

「量の値は、一般に数値と単位の積で表わされる。単位は、単に、ある量の特定の例であり、基準として使われる。数値は、その単位に対する量の値の比である。」（国際単位系(SI) 第 9 版(2019) 日本語版, p. 12)

ここでは「2 m」といった表記において、「m」は基準として使われる、長さという量の「特定の例」であり、「2」は表現しようとする量とこの基準の量との「比」である。そして「2 m」はこれら二つの「積」であるとされている。ちなみにこの「積」の部分は英語版では”product”、フランス語版では”produit”となっている。田村二郎先生の「量と数の理論」に倣い、算数風に書くならば、2 m は $m \times 2$ 、つまり「基準量×倍」ということなろう。

上では算数風として無理やり「 $m \times 2$ 」とは書いたが、通常は、私たちは「2 m」と書き、これを「積ならかけ算だから順序を入れ替えて m^2 でもいいだろう」とはならない。

かけ算の順序に関わる議論では、それぞれの陣営が“かけ算”をどのように定義しているのかが明確でないと述べた。少し強引かもしれないが、上のことを参考にすると、順序擁護派は、この「基準量×倍」の部分で“かけ算”としてイメージしているように見える。ただし、基準量は m といった単位量だけでなく、それを何倍かしたものを自由にとれると考える。例えば 2×3 では、被乗数の 2 は $2m$ といった基準量を表し、3 はその基準量を何倍するかを表す。ここでは「2 m」の場合と同様、積に現れる 2 つの要素には基準量と比という異なる役割が与えられており、「2 m」を通常は「 m^2 」と書かないのと同じように、その役割を明確にするために順序が大切になる。

田村先生は数の乗法を、倍変換の合成として定義されている。 2×3 は 2 倍変換と 3 倍変換の合成であり、それは $m \times (2 \times 3) = (m \times 2) \times 3$ により定義される(田村, 1978, p. 22)。なお田村先生はもちろん自然数の乗法に関して成り立つ公式として可換法則も挙げてはいる(p. 22)が、「乗法の可換法則は自明ではない」「別に証明しなければならない」(p. 23)としながらも、証明は明確には提示されていないようである。あえて擁護派との対比で言えば、順序否定派は、こちらの倍変換の合成に当たる部分を取り上げていると言えるかもしれない。実際は、有理数体や実数体など、そもそも基準量などの量を想定しない範囲で議論しているのではあ

ろうが、田村先生の議論をお借りして両者の違いを際立たせるとすれば、基準量と倍変換の積か、倍変換の合成としての積かの違い、あるいは $(m \times 2) \times 3$ に焦点があるか $m \times (2 \times 3)$ に焦点があるかの違いのように思われる。

上の意味づけを擁護派、否定派が受け入れてくれるかはわからないが、いずれにしろ、それぞれの考えている“かけ算”が何かが違うのに、それを明確にしないまま議論を続ければ、すれ違いになるのもやむを得ないであろう。

数学者の竹山美宏先生はその著書「数学ができるとはどういうことか」の中で、「生まれ育った環境や文化が異なる人と理解を共有しようとする、言葉を正確に使い、筋道を立てて自分の考えを互いに説明して、理解しなければなりません」(p. 132)と述べ、用語や記号の定義を明確にし、それに基づいた証明を通して定理を理解していく数学の学習が、そうした理解を共有する力を育むのに適していると指摘している。抽象的な概念を扱い、日常の生活と直接的にはあまり関係のない概念を用いるからこそ、そうした力を育むのに適しているとのことである(p. 133)。

かけ算の順序についての議論に参加しようとする人たちは、おそらく他の人より数学の学習を多くした人であろうから、是非とも、数学を学習すると上のような力が付くということを、身をもって世間に、特にこれから数学を学ぶ子どもたちに示してもらいたいものである。

また算数で学習した“かけ算”もその後の数学の学習につながる必要があり、逆に進んだ学習に現れる“かけ算”も最初は小学校第2学年での学習に根ざしているとすれば、それぞれの議論が、そうした“かけ算”の成長や生い立ちを考慮したものになることも願うものである。

【算数・数学教育におけるIAQに戻る】