

数の抽象性

数学の研究対象としての数はともかく、小学校の算数や中学校の数学あたりで学習する数は、基本的には量を表現する数として扱われる。ざっくりとえば、単位がどの位あるかを表すのが数であり、したがって、量は単位と数の組み合わせにより表現される。

そうした視点から考えてみると、数はやはり抽象的な対象だと改めて感じる。さらに小学校の学習であってもある種の再帰性が隠されており、そのために「単位」という言葉が二重の意味で用いられざるを得ないように思われる。

(1) 数の抽象性

モノを数えることは、モノの集まりの各要素を「いち、に、さん、…」という数詞の系列と対応させていき、最後の要素に対応する数詞によりモノの集まりの多さを表現している。また、長さや重さといった量を測定することも、基本的には、測定している量が「単位のいくつ分と等しいか」を調べているのだと考えると、単位の個数を数えていることになる。

ただし同じモノの集まりや対象を数えたり測定したりするとしても、何を「ひとつ」と考えるか、何を単位とするかにより、測定値である数は異なってくる。12個のプリンも2個のペアを「ひとつ」と考えれば測定値は6であり、4個パックを「ひとつ」と考えれば測定値は3である。1 m の長さも cm で表せばその値は100であり、mm で表せば1000となる。

つまり数は具体的な多さや大きさを表すというよりは、指さしなどの数えるという身振りや単位を並べていくという身振りの多さを表しているように思われる。数の大きさは、数えるものに印をつける「行為の多さを反映する」(Giusti「数はどこから来たのか」, p. 53)のであろう。しかし、身振りなので、その系列全体の多さは見えづらい。ブロックやおはじきで数を表そうとするのは、一つひとつの身振りの痕跡を残して、見えやすくしているのだと考えられる。スポーツ選手の動きの全体を連続写真により見えやすくしているようなものかもしれない。

さまざまな単位による数える身振りに共通な側面を抽出しているという意味でも、具体的な単位を伴わず具象性を欠いた身振りの型だけという意味でも、数は抽象的と言えそうである。数自体を考える時は、そうした抽象的な一連の身振りをモノのように扱って、その大きさを比較したり、計算という操作を施したりするのである。しかも「さん」といった数詞にも、「3」という数字にも、「III」という記号のような身振りの痕跡はなく、アイコン的なヒントもない中で、そうした

操作を行わねばならない。大変だなあ。

(2) 再帰性と二重の単位

9より先の2位数については、10のまとまりがいくつあり、残りがいくつあるのかにより数を表す。3位数ならこれに100のまとまりがいくつあるかが加わる。ここでは、10や100という数の個数を数える行為が含まれている。0.4を0.1が4個と捉えるならば、ここでは0.1という数をやはり数えていることになる。

ある種のモノの集まりやモノの大きさを単位とし、その個数を数えた結果を表すために数が導入されるのであるが、大きめの数や小さめの数を表しやすくするために、基本の数「1」から派生した新たな基本の数として10や100、0.1を作り、その個数を数えているのである。もちろん10や100、0.1の個数を数える際にも数が使われる。数の基本的な表現方法の中に数自身が用いられているという意味において、数は再帰的と言えるのではないだろうか。

そして今の議論に顕著に表れているように、「単位」という用語が微妙に異なる二つの意味で現れる。一つは数える際の基本となるモノの集まりやモノの大きさであり、もう一つは10や100、0.1といった基本の数「1」から派生した新たな基本の数である。どちらも基本の“大きさ”を表すという意味では、同じ「単位」という用語で表してよいのかもしれない。しかし前者が現実世界に現れる具体的な“大きさ”なのに対して、後者は抽象的なある種の数であるという違いもあるように思われる。

分数の学習では、例えば $\frac{3}{7}m$ は m という単位の $\frac{3}{7}$ 倍というよりも、 $\frac{1}{7}m$ の3つ分の長さとして説明される。ここでは長さの単位 m 、数「1」から派生した新たな基本の数、いわゆる単位分数としての $\frac{1}{7}$ の他に、量「 m 」から派生した $\frac{1}{7}m$ という新たな長さの単位が現れている。そのために、話はさらにややこしくなっている。

こうした数の抽象性や再帰性、それに伴う二重の単位の問題を考えると、算数における数の学習ですら、なかなか難しい内容だと思われてくる。そうした難しさを十分に考慮した指導が行われてきているのだろうか。

【算数・数学教育におけるIAQに戻る】