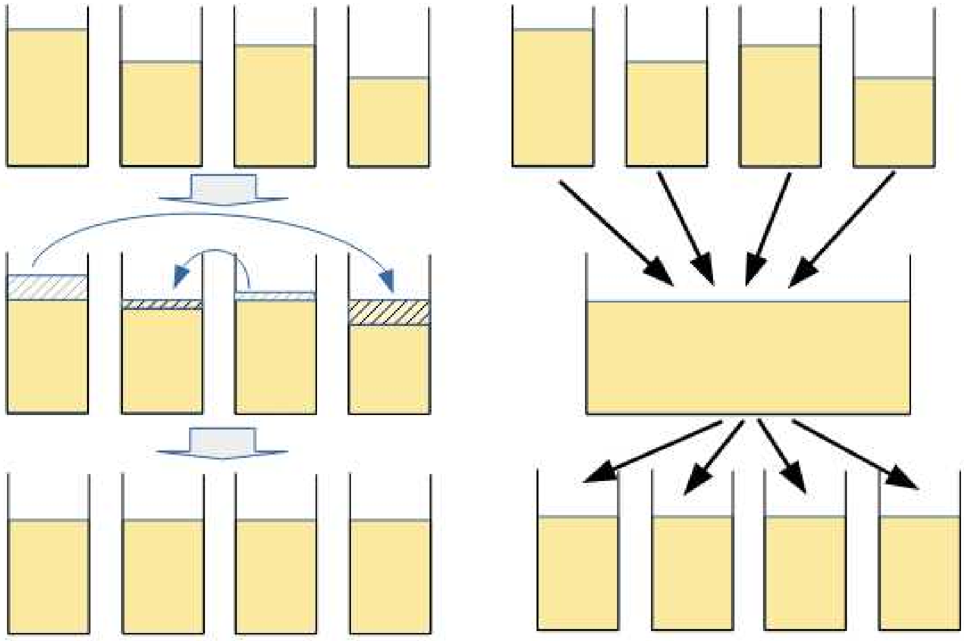
単位量あたりの大きさと「ならす」

小学校第５学年で単位量あたりの大きさを学習するに先立ち、平均が学習される。これは、単位量当たりの大きさを考える際に「ならす」ことが想定されているからであろう。

平均の単元を見ると、「ならす」操作としては、２通りのものが扱われている。



αタイプ　　　　βタイプ

なおβタイプでは集めて合計したものを、同じ量になるように再配分する部分で、さらに２つの方法が考えられる。一つは、合計の量を全てのコップに少しずつ注ぎながら微調整をし、最終的に同じ量になるようにするものである。もう一つは、わり算によりコップ１つに注ぐ量を決め、その分だけ順についでいく方法である。上の図の中段から下段に向かう４本の矢印は、そのどちらの方法を示すのかが曖昧になってしまっている。

「ならす」というとαタイプの操作をイメージするが、βタイプに見られるように、平均の単元においてすら、「ならす」操作が具体的にどのようなものなのかは曖昧かもしれない。

この曖昧さは、単位量あたりの大きさの学習にそのまま引き継がれる。

ジュースの事例にならい、ジュースのようにならされる方の量を内容量、コップの個数のようにいくつに分けるかを決める量を容器量と呼ぶことにしよう。1シートあたりの人数を求める場面なら人数が内容量、シートの枚数が容器量であり、速さであれば進んだ距離が内容量、かかった時間が容器量である。

単位量あたりの大きさは、内容量を容器量に均等に配置した時の容器1つ当たりの内容量ということになる。しかし、単元導入部の後になると、各場面について、均等に配置するための「ならす」操作は実際には行われない。確かに内容量の合計を容器量で割るので、βタイプの操作をしているのではあるが、合計が最初から示されるので、βタイプの最初の状態が確認されることはほとんどなく、また最後のならされた状態が具体的に示されることも、その状態を生み出す「ならす」操作が演示されることも多くはない。

つまり、単位量あたりの大きさの学習のほとんどの部分では、「ならす」操作は表だって現れることはなく、「ならす」操作の結果はわり算により求まるという式レベルの結果が援用されているだけのように見える。

もちろん、学習者が「ならす」操作をイメージできれば、自分で補ってもらうことも可能ではあるが、それぞれの場面の内容量と容器量の特性により、「ならす」操作がイメージしにくい場合が多いように思われる。

例えば県の人口密度であれば、内容量の人口も容器量の面積もかなり大きな値なので、具体的にイメージすることはほぼ不可能であろう。鉄の棒1mあたりの重さの場合、内容量にあたる重さをモノのように動かして「ならす」操作をイメージしにくい。燃費の場合、内容量である走行距離は容器量であるガソリンと直接結びついているわけではなく、最初の1Lが消費される間に走った距離、次の1Lが消費される間に走った距離というように、走行の運動や時間を媒介としながら、ガソリンの容量と走行距離とを自分で結びつける必要がある。つまり、「ならす」操作をイメージするために、ガソリンを1Lずつに分け、そこに割り当てる距離という“単位量当たりの大きさ”のようなものを先に構成する必要がある。

速さは運動の勢いを表すので、時間と進む距離とはもっと直接的に結びついて

いるように見える。しかし、逆にどちらも刻々と変わるので、そのままでは「ならす」操作は行いにくい。単位時間を容器のように見なし、そこに単位時間に進む距離にあたる“長さ”を割り当てていくと、とりあえず「ならす」操作ができそうであるが、そこでは既に動きの要素は消えている。「ならす」操作に基づきわり算をした結果を運動の勢いと関連づけるには、利用する側の解釈が必要となろう。さらにその「ならす」操作においては、燃費の場合と同様、時間をコップのように離散化した上で、全体の距離を等分して各容器である単位時間に入れる必要がある。つまり、各単位時間に同量の距離を割り当てていく。「ならす」操作をしたから単位量あたりの大きさが得られるのか、それとも「ならす」ために単位量あたりの大きさを考えるのかすら曖昧に思われる。

　このように、多くの場面では、いくつかのコップのジュースの量を「ならす」のに比べると、αタイプの操作やβタイプの微調整の操作は行いづらく、全体を等分した量を先に求めて、それを各容器に入れていくという操作になりそうである。そうなると、「ならす」ためにわり算の実行が必要となるので、「ならす」ことに基づいてわり算を正当化するという流れにはなりにくくなろう。

「ならす」操作が実際にはイメージしにくい場合が多いとすると、「ならす」操作の結果である「容器量全体に内容量が均等に配置されているようす」、いわゆる均質性を、単位量あたりの大きさの導入場面のように、操作の中で学習者に実感させたり見せたりすることができなくなる。そのできないことを補うとすれば、均質になっていること、つまり内容量が容器量に比例していることを、何らかの形で共有することが必要になる。

　しかも「ならす」操作を通して具体的に均質な状態を実感したり見たりできないとすると、均質性は頭の中で作り出すかなり理念的な状態となる。均質な状態を見ることはできないが、均質であると思い込んで内容量と容器量を扱うということである。また均質であるからこそ、単位量あたりの大きさをサンプルのように扱って比較のために使えるということや、容器量 n 単位分の内容量は、単位量あたりの大きさ、つまり容器量 1 単位分の内容量の n 倍として求めることができることなど、均質性の様々な側面を明確にすることで、均質性のイメージを豊

かにし、均質性の実感を高めていく必要もある。

なお「ならす」操作の結果を均質性や比例関係でとらえるという場合、第5学年という学習段階では比例関係をy＝(きまった数)×xの式としては学習していない。したがって、この「きまった数」を求めるために$y÷x$のわり算をするという納得の仕方は難しい。３年生の等分除の学習から「1あたりを求めるからわり算」という説明も可能ではあるが、ただ「ならす」操作の結果として等分の様子を見せることができないとすれば、「１あたりを求めるからわり算」という説明は「単位量あたりの大きさを求める時はわり算をする」とただ言っているのと同じことであり、方法の提示に留まる可能性もあろう。

「ならす」操作を実行するのも難しく、また比例関係を式の形で捉えることもできない学習者に対して、内容量を容器量で割ると単位量あたりの大きさになることを、単位量あたりの大きさの意味することもわかるような形で、単元を通して学習してもらうには、どのような説明の仕方がよいのであろうか。

【算数・数学教育におけるIAQ に戻る】