文字式の計算における二面性の往還

令和５年度全国学力・学習状況調査数学の問題6(2)は、n×2＋(n＋6)が３の倍数になることの説明を完成させる問題であるが、正答率は59.5 %であった。もちろん説明が不備で正答にならなかった人もあるが、式の計算自体が不適切な事例もかなり見られる。

解答類型11は3×□と変形したものの、□がn+2以外という解答であり、10. 5 % の生徒がここに分類されている。その事例としては3n+6を3(n+1)や3(n+6)とした解答が示されている。「上記以外」の類型99 (12.4 %)の事例としては、3n+6を6(n+1)と変形したものが示されている。令和７年の調査のように、9の倍数になることを説明する際に9n+9＝3(3n+3)と変形した解答であれば、変形の仕方は誤りではないので、目的に沿った変形ができなかったと考えることもできよう。しかし上の誤答は、変形の仕方としても不適切である。また3(n+1)や3(n+6)、6(n+1)が3n+6と等しくないからとして、考え方を修正することにもつながっていないことになる。この意味においては、上の類型に入る解答が約23 %あったことに加え、無解答も10.4 %であったとを併せて考えると、文字式の計算に関しても生徒の理解が十分なものでないことを示唆しているように思われる。

同様の傾向は令和４年度調査でも見られる。2n+(2n+4)が４の倍数になることを説明する問題で、類型99 (19.4 %)の例としてこの式を2n+6n＝8nや4n^2+8nとした解答が示されている。前者は2n+4＝6nとし、後者は2n×(2n+4)として計算しており、無解答の19.6 %と併せて、やはり文字式の計算における弱さを露呈している。令和６年度調査のように文字の数が３つの場合には、この傾向はさらに強まるように見受けられる。(a+b)＋(b+c)＋(c+a)がa+b+cの２倍になることを説明する問題で、類型99は26.3 %、無解答は23.0 %であり、類型99の例としては、上の式をa^2+b^2+c^2、ab+bc+ac、$(a+b+c)^2$と変形した解答が示されている。

確かに令和５年度調査問題２の分数を含み分配法則を用いる式の計算では、正答率が80.9 %であったので、文字式の計算であればあまり問題がないようにも見える。しかし上述の結果も見ると、何かを調べる途中で文字式の計算が必要になった際に、自然に計算を行うことができる程には、文字式の計算に習熟できていない生徒が、４割前後はいるのではないかとも推測される。

計算で戸惑う背景には、上でも触れた変形の目的を意識できないことや、変形

を支える計算法則が曖昧な場合のあることなどの理由もあろう。しかし二面性の議論や式の読みも念頭に文字式の計算のことを改めて考えてみると、上の問題で求められる程度の計算であっても、文字式を操作的に捉えることと構造的に捉えることの間を何回も行ったり来たりする必要のあることが見えてくる。つまりある式をいくつかの項をたしたりひいたり、かけたりする一連の操作と見なしたり、同じ式をある構造を持った1つの数と見なしたりすることを、適宜変更することを繰り返すことで、式の計算を遂行している。

例えば、先ほどの $2n+(2n+4)$ の計算を考えてみると、次のようなことを、私たちはほとんど瞬間的に、また無意識に行っているのではないだろうか。

(i) $2n$ と $2n+4$ をそれぞれが1つの数であると構造的に捉え、$2n+(2n+4)$ をその２つの数をたし合わせた和と見なす。

(ii) $+(2n+4)$ を $2n+4$ という1つの数を加えると操作的に捉える。

(iii) $2n+4$ を1つの数と見なすことから、$2n$ に4を加えるという操作的な捉え方にスライドする。

(iv) $+(2n+4)$ を、$2n$ を加え、次に4を加えるという２つの連続した操作と捉えることにスライドする。

(v) それぞれの $2n$ を $n\times2$、つまり n の2倍あるいは n が2つと捉えなおす。

(vi) $2n+2n$ を n の2倍と n の2倍を併せると操作的に捉え、全部で n が4つになるので $4n$ だと考えて式を $4n+4$ と変形する。

(vii) $4n+4$ を構造的に捉えて1つの数と見なし、これが元の和の別の姿であると判断する。

(viii) $4n+4$ が4の倍数であることが見えやすくするために、4×(整数)の形に半ば強引に変形する。そのために4×(整数)を展開した時に $4n+4$ に戻るように括弧の中を考え、$4(n+1)$ と決める。（あるいは $4n+4$ を $4\times n+4\times1$ と見なし、共通因数4でくくる）

(ix) $n+1$ を構造的に捉えて1つの整数と見なし、次に $4(n+1)$ を4を $(n+1)$ 倍すると操作的に捉えた後、$4(n+1)$ を4を何倍かして得られる数と構造的に捉えなおして、4の倍数になると判断する。

なお、(ii)のように $2n+4$ を $2n$ と4に分けて考えることの背景には、第1項の $2n$ と同類項になりそうなものを集めたい、という意図があるはずであり、逆に4はそれらとは同類項になっていないという判断があるはずである。つまり、(ii)の捉

え方のスライドは、(vi)のステップを先取り的に見越した上で、フィードフォワード的に行われていたはずであろう。

もちろん上とは別のプロセスを経て計算している場合もあろうし、(ii)から(iv)の部分は単に結合法則を用いて一度に行ったり、$2n+2n$ も分配法則に基づいて $4n$ になると考える、さらには $2n+2n=4n$ はきまった計算の仕方として形式的に遂行しているだけだという意見もあろう。

ただ自分の行っている計算を一つひとつ再現してみると、結合法則や分配法則を用いて形式的に処理するというよりも、上のように“加える”といった操作を経由しながら、操作の順番を入れ替えたり、n を4つ“集める”操作としてイメージしたりしながら、自分なりに納得しながら変形を行っているように思われる。

普段、無意識的に行っている歩く運動や自動車の運転の手続を、改めて書き出したり、それを一つのレシピとして人に伝えたりするのはなかなか難しいように、何気なく行っている文字式の計算をきちんと伝えるのも容易ではないのかもしれない。私たちが授業で伝えている“計算のステップ”には、いろいろと欠落している側面もあるのかもしれない。

計算で迷う生徒は、そうした欠落部分が自分で埋められずに困っているのかもしれない。あるいは、私たち教師が思い浮かべることもできないような何かが、私たちの行う計算にはまだ残されているのかもしれない。

もちろん、そうした全てを明示的にして生徒に示すことは、かなり煩瑣な説明となり、それほど有効な支援ではない可能性もある。ただ、私たちが自然にできていることにも時には注意を向け、 私たちの説明において大切な何かが抜け落ちていないかを検討してみることも大切なのかもしれない。式の構造的捉え方と操作的捉え方の間を行ったり来たりすることは、そのための一つの視点とならないであろうか。

【算数・数学教育におけるIAQ に戻る】