

かけ算の順序（２）

かけ算の順序に関わる主張を見ていると、そもそも、それぞれが「かけ算」で何を意味しているのか、あるいは「かけ算」をどのようなものとして規定しているのか、が曖昧なままに自身の主張を展開しているような気がしてきた。順序に意味があるのかどうかは、「そこで言う『かけ算』とは何か」に基づいて正当化されるべきであろうから、「かけ算」で意味するものがそれぞれの立場で異なるのであれば、議論がなかなかかみ合わないのも、仕方がないのかもしれない。

小学校第２学年の教科書では、 $(1つ分の数) \times (いくつ分) = (ぜんぶの数)$ を表現する計算としてかけ算が導入される。しかしこれは量の場面での話であるから、数の世界でのかけ算をどう決めるのかは、ここからだけではよくわからない。量ではない数の世界において「1つ分の数」と「いくつ分」が何を意味するのかが明らかにされなければ、上のかけ算の説明は数の世界では意味を持たない。かけ算を常に量の世界だけで考え、数の世界などは考えないということであれば、上のかけ算の捉え方に基づいてかけ算の順序にこだわるのも一つの立場とは思いますが、数の世界でかけ算を説明せずに数の世界のかけ算を論ずることは、ルール違反であろう。また現実的な量の場面であっても、等分除と包含除の統合で行われるような読み替えを想起すれば、場面の解釈は必ずしも一意的に決まらないので、結局のある“一つの解釈”に対する表現であるから、場面をただ提示して解釈の仕方を指定しないのであれば、場面に対してかけ算の順序はそもそも一意には決まらない。それでは well-defined とは言えないのではないかな。

かけ算を累加により導入することは、数自体も数えることができると想定するならば、数の世界でのかけ算を決めることにはなりそうである。その場合は、例えば $m \times n = n \times m$ であると主張するには、 m を n 回たしたものと n を m 回たしたものが同じであることを、たし算の定義に従って示せばよいであろう。また、かけ算を関数 $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ で $g(m, n') = g(m, n) + m$ (n' は n の後者) を満たすものとして決める場合も、 $g(m, n) = g(n, m)$ であることをこの定義に基づいて示すことになる。ただし圏論の研究者であるユージニア・チェン氏のように、次のように述べる人もある：「 $5+1=1+5$ と書いたとき、実際に意味しているのは計算結果が同じということであって、両辺が完全に同じということではありません。そもそも両辺が完全に同じなら、等式を書く意味はありません」(「世界は圏論で

きている」, p. 17)。したがって、上のような形でかけ算の順序は基本的に問題にならないと主張したとしても、それが計算結果が同じという意味でそう主張しているのか、それとも演算の式としても完全に“同じ”と主張したいのかは、明確にする必要があるのかもしれないし、後者であれば結果が同じとなる以上の説明が必要かもしれない。また現実場面においても、3円ずつ1000000回に分けて返してもらう場合と、100万円ずつ3回で返してもらう場合とでも、総額は300万円が変わらないから同じことだと考えるのか、現実場面へ適用する場合はまた話が別なのかも考えてみるべきなのかもしれない。

整数や有理数ではかけ算の交換法則が成り立つのだから、かけ算の順序にこだわるのは無意味だと主張する場合、そこでの「かけ算」はどのように定義されていると想定しているのであろうか。まさか可換環の公理のように、最初に約束事として天下り的に入れるということでもあるまい。また少なくとも算数の文脈で議論をするのであれば、そして小学校2年生に対しても公理的に導入すればよいと考えるのではないとすれば、彼らにかけ算をどう説明するのか、という点も考慮しながら、「かけ算」で何を意味するのかを説明してもらう必要がある。2年生にもある程度説明が可能で、しかもその説明からすると順序は意味を持たない、ということであれば、順序にこだわるのは無意味とする主張にも一理はありそうである。しかしそうした説明がないままに、乗法を既によく知っている立場からのみ論じるのは、フェアとも言い難いように見える。

かけ算の一連の学習があったときに、順序にこだわる人はその入り口側からのみ見ており、順序を無意味とする人はその出口に近い所からのみ見ているような気がする。どちらの言い分にも一理あるが、どちらの言い分も大切な部分を欠いているのではないだろうか。「かけ算」の意味することは何か、それと小学生をどう出合わせるのか、先の学習を見据えてその理解をどう育てていくのかなどを、お互いが考えてみることで、順序の論争ももう少し生産的になるのではないだろうか。算数・数学に関わる議論をするのですから、まさか自分の使う「かけ算」が定義できない、などということはないですよ。

[【算数・数学教育におけるIAQに戻る】](#)