

比例・反比例の小中不連続（２）

～変化と対応～

小学校第４学年で、ともなって変わる２量が一つの単位として前面に出てくる。学習の出発点は、ある量が増えると別のある量もともなって増えていそうだとか、逆にある量が増えるほど別のある量はどんどん減っていそうだといい、２量がともなって変化しているという感覚のように見える。これは、普段私たちが目にしたり経験したりしている変化である。

感覚的にあるいは質的に(qualitatively)捉えた共変(covariation)の様子を、さらに詳しく量的に(quantitatively)調べるとなると、一方の量のいくつかの値に対して、その時のもう一方の量の値を調べて表にまとめることになる。そしてその表を振り返って、一方の量が例えば１増えると、あるいは２倍になるともう一方の量はどのように変化するかを、数値的に記述する。２量の変化の仕方の対応に着目していると言えよう。また２量の値の間に比較的簡単な関係があるとか、元の場合の特徴から両者の関係が捉えやすいといった場合には、その関係を○や△を用いた式で表したりもする。こちらは２量の値の対応に着目している。

ここでは共変による見方がまずあり、その時の変化を詳しく調べていく中で２つの量の間の対応(correspondence)に注意を向け、そこで見いだした特徴を言葉や式で記述している。見たり感じたりした変化を頭で捉え、詳しく記述したと言えるかもしれない。しかも算数の学習では具体的な場面に現れる２つの変量を扱うので、その場面をイメージすれば、量が増えたり減ったりする動画的な様子にまず注意が向くのは自然なことではないだろうか。

これに対し、中学校で学習する関数は、一方の変数 x の値にもう一方の変数 y の値が対応して決まるところからスタートする。具体的な場面を伴わない場合は、 x は様々な値をとるとしても、特に“変化”するわけではない。実際、比例のグラフが直線になることを示す際の教科書の図は、点の集合が徐々に密に集まる様子を示すものであり、動きや“変化”を示してはいない。ただ x が様々な値をとり、多くの x と y の対が^{ついで}決まる中で、 x の値の集合を小さい順に並べ、 x の値が“変化”していると見なすならば、対応する y の値も“変化”していると見るができるようになり、その結果“ともなって変わる２つの変数”が生じることになる。

変数の定義には「変化する」という要素は含まれないが、変数と「変」の字を含み、英語でも variable と呼ばれるので、上述のように“変化”していると見なすことも、少なくとも初学者に対しては許されるであろう。実際、昭和 40 年前後の教科書では変化のニュアンスを含めた形で変数を説明していた教科書も存在していた。算数での変量のように最初から変化しているわけではないが、中学校数学での変数も私たちの方で“変化”していると見なすならば、2 変数の対応関係により“ともなって変化”しているように見えてくる。

このように対応が決まっているときに、そこからどのような共変の関係が生まれるか、そこに生まれる共変にはどのような特徴があるかを調べるのが、中学校の数学の学習なのかもしれない。グラフにしても、改めて考えるならば、2 変数の対応を表す点がまずあり、それらが集まることで直線や曲線になっている。そして線が形成されると、線の形状的な特徴が生まれるが、それは共変の特徴を反映することになる。グラフ自体も、対応から共変が生まれることを体現していると言えよう。

以上のことを比喩的に捉えるならば、算数では動いているものを連続写真で撮って詳しく調べようとするのに対し、中学校の数学ではコマ撮りの写真を併せていくことで逆にアニメーションの動きを作りだしていくようなものかもしれない。

共変・変化と対応はもちろんどちらも大切な見方ではあるが、コマ撮りのアニメーションが現実とは異なるファンタジーでも創り出しやすいように、必ずしも現実の場面を背景にしないような関係の場合でも対応なら表現しやすいなど、対応の見方にはいくつかの利点があるように思われる。中学校の数学では、変化から出発する日常的な感覚に近い算数での話を、対応関係から出発するという日常とは少し異なる話に転換するのであるから、そのように捉え直すことが中学生に明確に意識してもらえるようにするとともに、そのように捉え直すことの意義もまた中学生に伝わるように私たちは意を払うべきではないだろうか。

【算数・数学教育における IAQ に戻る】