比例・反比例の小中接続

小学校と中学校の教科書を見ると、比例はそれぞれ次のように定義されている。

小学校：ともなって変わる2つの量□と○があって、□が2倍、3倍、…となると、○も2倍、3倍、…になるとき、○は□に比例するといえます。

中学校： y が x の関数であり、その間の関係が次のような式で表せるとき、 y は x に比例するという： $y=ax$ ($a \neq 0$)。

なお中学校の定義に出てくる x と y は、変数という想定であろう。

これを比較すると、大きくは2つの違いがある。そうした違いが、小中の指導の中で考慮され、学習者に納得してもらえているのだろうか。

違い1：変量と変数

小学校の定義では「2つの量□と○」、つまり変量(variable quantities)が話題となっているのに対し、中学校の定義では「2つの変数 x 、 y 」、つまり変数(variables)が話題となっている。中学校で変数を考えることで、具体的な量から離れて、自由に数を代入できるようにはなる。

しかし逆に言えば、量が全く現れない状態で、変数や比例を考える必要も出てくる。一部の教科書は変数に関わり「ともなって変わる2つの変数 x 、 y 」という言い方をしているが、変化する量を伴う場面がない中で、2つの変数が「ともなって変わる」というのもイメージしにくいのではないだろうか。

「1分間で水位が2 cm 上昇する時の経過時間 x 分と水位 y cm の関係」を「 $y=2x$ 」と表現することと、そうした量の背景が何もない状態で「関数 $y=2x$ 」について考えることは、活動としてかなり異なるように思われる。その間の橋渡しが、小中の間でできているのか、という疑問が生じる。(参考：[算数と数学の違い](#))

違い2：共変と対応

小学校の定義はいわゆる表の「横の見方」あるいは共変(covariation)に基づいて

いるのに対し、中学校の定義は「縦の見方」あるいは対応(correspondence)に基づいている。もちろんこれは、中学校で対応をベースに関数を学習し、その流れで比例を学習するからであるが、この二つの定義は「比例」という同じ対象を規定しているのであろうか。また生徒たちに、そのことを納得してもらう必要はないのであろうか。

中学校の定義では、 x と y の間の関係は $y=ax$ で表されるとなっているので、ある有理数 k があって x の値が k 倍になったとすると、 y の値は $y=a(kx)=k(ax)$ より、やはり k 倍となることがわかる。つまり、中学校の定義で比例であれば、小学校の定義でも比例となりそうである。

では逆に、小学校の定義で比例であれば中学校の定義でも比例となるのだろうか。これは定義中の「2倍、3倍、…となる」の「…」がどの範囲を含むのかによる。小学校や中学校1年の段階では有理数しか学習していないので、その範囲の数については全て「…」に含まれるとすれば、中学校の定義と同じになりそうなことは、すぐにわかる。実際、小学校の教科書でも本文中では、2.5倍や $\frac{1}{3}$ 倍の場合も調べている。

この場合、小学校の定義によれば、ある有理数 r について x の値が r 倍になったら y の値も r 倍になる。したがって、 $x=1$ の時の y の値を a と表すと、 $x=r$ の時の y の値は a の r 倍なので ar となる。これが全ての有理数 r について言えるのであれば、今の x と y の関係は $y=ax$ と表せることになる。

中学校では、有理数の範囲を負の数まで広げる必要はあろうが、少なくとも正の有理数の範囲では、小学校の定義から $y=ax$ と書けることはわかる。

もう少し考えると、実際は、自然数の場合が想定できれば、正の有理数についても自然に言えることがわかる。今、当該の関数を $y=f(x)$ と表すことにする。そして、任意の自然数 n と任意の x について $f(nx)=nf(x)$ が成り立っているとす。こ

の時、 $nf\left(\frac{1}{n}x\right)=f\left(n\left(\frac{1}{n}x\right)\right)=f(x)$ なので、 $f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(x)$ であることがわか

る。さらに、任意の有理数 $\frac{m}{n}$ を考えると、 $f\left(\frac{m}{n}x\right)=f\left(m\left(\frac{1}{n}x\right)\right)=mf\left(\frac{1}{n}x\right)=m\cdot\frac{1}{n}f(x)=\frac{m}{n}f(x)$ となるので、 x の値が $\frac{m}{n}$ 倍になると y の値も $\frac{m}{n}$ 倍になることがわかる。

これは例えば、 x が 6 から 3 に $\frac{1}{2}$ 倍になる場合、 x が 3 から 6 に 2 倍になると y の値も 2 倍になるとわかっていれば、 $x=3$ の時の y の値が $x=6$ の時の y の値の $\frac{1}{2}$ 倍であることが自然に出てくるということである。任意の実数についても小学校の定義から中学校の定義が言えることを示すためには、あるいは連続性などの条件が必要かもしれないが、中学校 1 年では有理数までしか学習していないので、小学校の定義から中学校の定義が言えることも示せそうである。

ただ上のような説明が容易だとしても、これを中学校 1 年生に説明することは無理であろう。だとすると、中学校で学習する比例の定義が小学校の時に学習した定義と基本的に同じであることを、中学校 1 年生にどう説明して納得してもらうのかは、また別の問題ということになる。

なお、反比例の定義についても同じ問題があることは自明であろう。

ついでながら、具体的に 2 変数 x や y があった場合に、全ての有理数 r と全ての x の値について、小学校の定義のように、 x の値が r 倍になると y の値も r 倍になることを確かめることは、実際にはむずかしい。具体的な量を想定できれば、その量の性質や場面の特徴に基づいて小学校のような定義が成り立つかを判断できたが、中学校ではそれはできない。

他方で、中学校の定義のように全ての y の値について、ある a ($\neq 0$) を用いて $y=ax$ という式で各 x に対応する y を決めると“約束する”ことは可能であるし、小学校の定義よりもしやすい。量を伴う場面がない中で、この“約束ごと”が記述しやすいことも、中学校で上述のような定義になっている理由の一つなのかもしれない。

【算数・数学教育における IAQ に戻る】