

無理数の計算の難しさ

中学校第3学年で、平方根のついた数の計算について学習する。無理数自体、**循環しない無限小数になる**という難しさがあったり、加法では**1つの数っぽく表せない**という違和感があったりする。これに比べると、乗法の場合には、 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ などとなるので、ある意味では生徒の感覚にも合いそうである。

$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ となることに関しては、教科書では以下のように正当化される： $(\sqrt{2} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) = 2 \times 5$ 。この両辺の平方根をとれば、確かに $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ と言えそうである。

しかしよく考えてみると、この説明の仕方には、次のような曖昧さがある。

- ・無理数の乗法において交換法則や結合法則が成り立つことを確認していないにも関わらず、それを用いた説明になっている。

例えば、中学校第1学年で正負の数を学習する際は、まず乗法の計算の仕方を学習し、次に、それに基づいて実際に必要な場合を計算してみて、交換法則や結合法則が成り立つことを確認している。いわば**観察結果の記述としての法則**である。これに対して、無理数の場合には、乗法の計算の仕方を考える時点で、交換法則と結合法則を「前提」としてしまっている。

その原因と考えられるのが、量による乗法の計算の説明ができにくいことである。負の数を含む乗法については、**かなりのごまかしはあるものの**、時刻と位置との関係を用いて乗法の計算の仕方を説明していた。そこでは交換法則や結合法則は特に「前提」しなくても、量に関わる場面を考察することで、計算の仕方を考察することができた。こうした学習は、**小数や分数の乗法**の場合と同様である。

一方で $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ となることを、量に関わる場面の考察から確認するのは容易ではない。教科書では辺の長さが $\sqrt{2}$ cm と $\sqrt{5}$ cm の長方形を提示してはいる。しかしこの長方形の面積が $\sqrt{10}$ cm² となることが計算をせずには求まらなければ、面積の話から乗法の計算の仕方を導くこともできない。近似値で「なりそうだ」との傍証は得ることができても、 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ 自体が導けるわけではない。

そのため、この時点で生徒たちと共有できている $(\sqrt{2})^2=2$ 、 $(\sqrt{5})^2=5$ に訴える説明をせざるを得ないが、そうすると、交換法則と結合法則を「前提」せざるを得なくなる、ということなのであろう。ちなみに $(\sqrt{2}\times\sqrt{5})^2$ を面積のイメージで考えると、面積の2乗を考えることになるので、話がややこしい。

負の数の乗法のように量の場合を抛り所にできず、交換法則や結合法則を利用した代数的な操作に基づいて計算の仕方を構成するという意味で、無理数の乗法の学習においては、それまでの計算とは全く異なる理解の仕方が求められているのかもしれない。

また、計算の仕方を構成する際にそれらの法則が用いられているということは、交換法則や結合法則が成り立つように計算の仕方を構成することである。ある代数的な性質を維持するように計算の仕方を規定していくという点で、**数を拡張する**という意図が、これまでよりも鮮明に出ている学習場面とも言えよう。

ちなみに、 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ をそのまま和と考えることは、式の二面性の点からの難しさがあるだけでなく、生徒には「たせてないのでは」「本当はたせてないのでは」という疑念を起こさせていないだろうか。長さが $\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ の線分を併せたとして、その長さがちゃんと数で表せるのかは、やはり曖昧かもしれない。小数や分数、**負の数の和**のときのように、併せた量がどのような数で表せるかを、図などを通して考えることは難しい。実際これまでの数では、和は、加法を行う前から考えていた別の数で表せたが、 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ではそうはなっていない。

となると、この和も実は、和はとりあえず $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ としておきましょう、そしてこれも1つの数だと考えましょう、と単に約束をしているだけなのかもしれない。和が「いくつになる」ではなく、和を「とりあえずこうしておく」というのも、初めての経験であろう。

こうした微妙だが大きな違いを見落とすと、無理数の学習を軽く考えてしまうことになりかねない。また、代数的な数の拡張というニュアンスが以前の学習より強いことから、高等学校で複素数を**学習するための体を作る**役割も持つかもしれないが、そうしたことも意識されにくくなろう。無理数の学習に関して、こうした違いはどこまで意識されているであろうか。

【算数・数学教育におけるIAQに戻る】