説明と証明

奇数と奇数の和が偶数になることは、中学校第2学年の文字式の学習において、例えば次のように証明される。

2つの奇数は、2つの整数 m 、 n を用いて、 $2m+1$ と $2n+1$ と表すことができる。したがって2つの奇数の和は $(2m+1)+(2n+1)$ となる。

これを計算すると、

$$(2m+1)+(2n+1)=2m+1+2n+1=2m+2n+2=2(m+n+1)$$

となる。ここで $m+n+1$ も整数であるから、 $2(m+n+1)$ は偶数である。つまり2つの奇数の和は偶数となる。

この証明をもとに奇数と奇数の和が偶数になる“理由”を求めるならば、 $2m$ や $2n$ の部分はもともと2で割りきれるので、それぞれに付いていた2つの「+1」が和により合わさり「+2」となったことではないかと考えられる。つまり、ペアからあぶれていた人どうしが新たにペアを形成できたことが、全員がペアになれたことの“理由”と考えられるのではないだろうか。

そしてこの“理由”は、偶数に「+1」をした形をしているという、奇数の特徴に由来している。実際、奇数と偶数の和では後者が「+1」の形をしていないために、前者の「+1」とペアになる人がいないこととなり、和が偶数になるという現象は生じないことになる。

ある本を読んでいたら、三角形の内角の和が 180° になることについてのよくある証明を提示した後、こうした証明では根拠と成り立つ事柄を示しているの“理由”の説明になっているとされていた。△ABCの頂点Aを通り辺BCに平行な直線を引くと、錯角が等しいということを用いて、∠Bや∠Cが頂点Aの横にある角と等しくなることが言えるので、3つの角が確かに 180° であることはわかる。では、三角形の3つの内角の和が 180° になる“理由”は、具体的には何であらうか。

直接的には、点Aを通る直線の周りに3つの内角を集めることができるから、ということかもしれない。そして集めることができる“理由”は、第5公準に依拠しているのだとすれば、結局の“理由”は第5公準を仮定しているから、ということなのかもしれない。実際、ヒルベルト「幾何学基礎論」や小平邦彦「幾何への誘い」では、錯角や同位角が等しいこと(前者は定理30、後者は定理4.2)や三角

形の内角和が 180° になること(前者は定理 31、後者は定理 4.4)を証明する直前に、第 5 公準のプレイフェア版を公理 IV (平行線の公理)として導入している。

ただこの場合は、上の奇数の時とは異なり、問題としている三角形という対象の特性と“理由”とが直接的には結びつくような説明にはなっていない。辺 BC 上にない第 3 の頂点がとれるので BC に平行な直線が引けるのだとは思いますが、確かに 1 本だけ引けることやそれにより錯角が等しくなることは、公準や公理により保証されることなので、三角形の特性から内角の和が 180° になる“理由”が説明できたという感じを持ちにくい気がする。強いて言えば、三角形では辺 BC 上にない頂点が存在することが、平行な直線を引ける“理由”であり、内角の和が 180° になる“理由”ということになってしまうかもしれない。おそらく今の証明の「仮定」の部分に「考えている図形は三角形である」と書いても、あまりしっくりこないのではないだろうか。少なくとも、“理由”の説明になっていると簡単には言い切れないように思われる。

平成 24 年度全国学力・学習状況調査数学 B 問題 1 (2)では、ISS の軌道の長さ とひまわり 7 号の軌道の長さの差が地球の半径に拠るか拠らないかを、差の計算から判断し、またその理由を説明するという問題が出された。正答率は 11.8 %であったが、さらに気になるのは、半径に依ると判断した人が 54 %近くいたことである。差を表す式に地球の半径を表す r が現れないことが、差が半径に依拠しないことを意味するという点が、あまり理解されていなかったことになろう。

この結果は数学教育に関わる者として残念ではあるが、この結果を念頭に、教科書でよく扱われる課題を見直すと、私たちの提示の仕方にも少し気になる点が出てくる。教科書では地球の赤道にロープを巻き、次にこのロープを地面から 1 m だけ高い位置に張ると、ロープは何 m 長くなるかを考えるという課題が、しばしば扱われる。

この問題の 1 つのポイントは、赤道のような 4 万 km 以上ある部分に巻いた長さを 1 m 持ち上げるにも関わらず、長さは 6 m 程度しか長くないという、両者のギャップにあると考えられる。全国調査と同様、地球の半径を r として計算をすると確かに 6.28 m 程度しか伸びないことは示せる。また途中の式変形から、地球に限らず、どのような半径の円周上のものについても、1 m 浮かせてロープを張ると、その円周よりも約 6.28 m 長くなることもわかる。しかし、なぜ上述のようなギャップが生じるのかの“理由”は、式の変形だけではわからないので

はないだろうか。

2つの円周の長さの差なので、半径が少しだけ異なる2つの円という今の対象の特性から長さにほとんど差がないことを説明することが、上のギャップが生じる本当の“理由”を説明することになるのではないだろうか。そうした気持ちで考えていくと、これも式の学習でよく出てくる、[額縁のような図形の面積を求める場面](#)との関連性なども見えてきて、様々な場面が統合されるような感じにもなってくる。

私たち教師は、これまで普通になされてきた証明をすることで、当該の現象が生じる“理由”を説明できたと思ひ込み、学習者もその説明を通して“理由”を理解してくれたと思ってしまう。しかしそれぞれの説明を考えてみると、その現象が生じる本当の“理由”がきちんと説明されているのか、あやしいものも結構含まれているのではないだろうか。そうしたケースでは、私たちの側も“理由”を実はきちんと説明できないかもしれないし、学習者の方も「だからそんなことが起こるのか！」といった実感を伴っては“理由”を納得してくれていないかもしれない。そうだとすると、証明の魅力が生徒に十分には伝わらないとしてもしかたない。

[証明の意義](#)を生徒がわかってくれないということは中学校の先生方からもよく聞くことであり、また例えば[平成30年度全国学力・学習状況調査数学問題8](#)の結果などにも見えることである。その意義をより強く感じてもらうためには、証明が学習者から見ても魅力的である必要があろう。そして、その一つの可能性として、不思議な現象が生じる“理由”を証明が説明してくれる、いわば手品の種明かしをしてくれたという経験をしてもらうことが考えられる。上で見てきたことは、私たちの実践の中に、そうした方向において、まだ検討の余地がいろいろあるかもしれないことを示唆している。

そうしたことを考えると、古い議論ではあるが、[Gila Hanna 先生などが提唱された「説明する証明 \(proofs that explain\)」](#)の視点から、改めて自分が行っている証明を吟味し直してみることも必要ではないだろうか。

(参考：[証明のゆっくりめの練習](#))

[【算数・数学教育におけるIAQに戻る】](#)