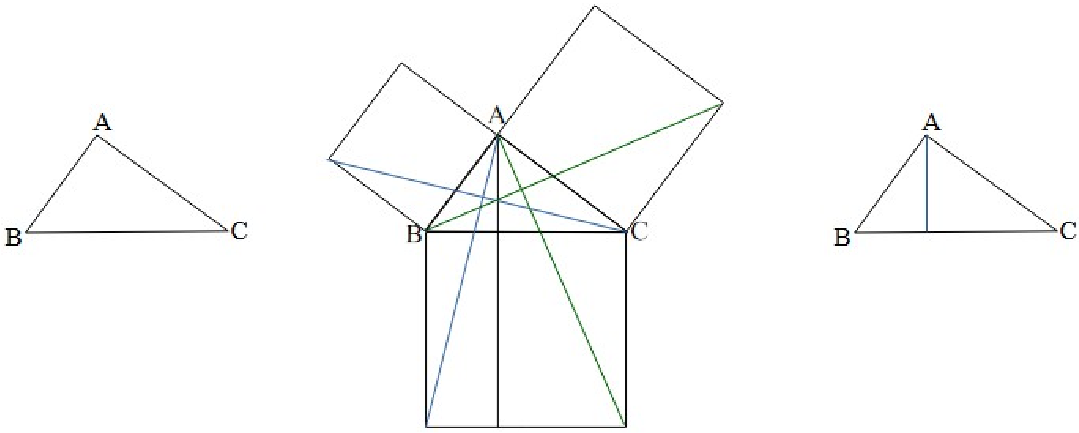
説明と証明（２）
〜三平方の定理の場合〜

Carlo Celluci 先生の”The Making of Mathematics: Heuristic Philosophy of Mathematics”では、ある命題がなぜ成り立つのかの理由まで示す説明的証明(explanatory demonstration)と、理由までは示さず命題が成り立つことだけを保証する非説明的証明(non-explanatory demonstration)とに関わる議論が、第 14 章を中心に行われている。その一つの例として、三平方の定理のよく知られた 2 つの証明が検討されている。 1 つは真ん中のような図を用いて、 2 つの正方形の面積が、斜辺を 1 辺とする正方形を分割してできる長方形の面積とそれぞれ等しくなることを示すものである。もう 1 つは、頂点 A から斜辺 BC に垂線を引き、できた三角形の相似比から三平方定理を示すものである。

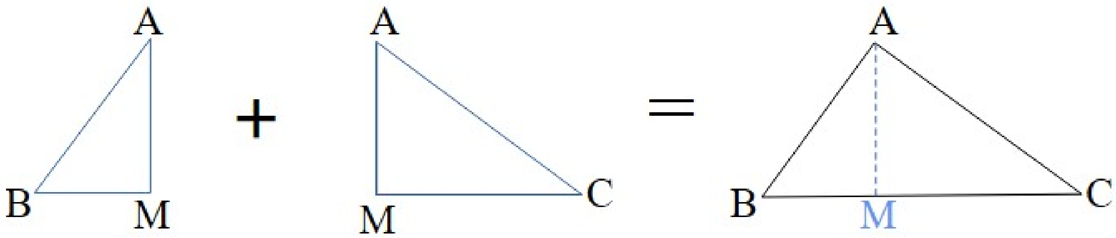


自分の感覚では、三平方の定理は正方形の面積の和に関わるので、真ん中の図のように等積変形を利用した証明が、説明的なのだろうと思いながら読んでいた。これに対して右の図を用いた証明では比に関する等式を用い、さらに内項の積と外項の積が等しいという式変形に大きく依存しているので、もともと間接的な証明のような気がしていた。なので、こちらが非説明的であろうと思っていた。

ところが、Celluci 先生の結論は逆であり、面積に基づく証明は非説明的であり、比の等式に基づく方が説明的ということであった。前者については、補助線を「なぜ」引くのかの理由もなく引いており、読者は内部構造の理解できない部分も驚きをもって認めるしかない、とするショーペンハウハーの言葉も引用している。後者については、定理が基づく主たる事実は「直角三角形は元の三角形

と相似な２つの三角形に分割できる」ということであり、これが三平方の定理がなぜ成り立つのかの理由(the reason why)だと補足している(p. 359)。

なぜそうなるのか、と最初は戸惑ったが、考えてみてなるほどと思った。おそらく、後者の証明は、結局、以下のようなかなり自明な事実に基づいている。



３つの三角形は互いに相似であり、その相似比は AB：AC：BC である。したがって、３つの三角形の面積比は $AB^2 : AC^2 : BC^2$ となろう。したがって元の三角形の面積を S とすれば、上の図は $\frac{AB^2}{BC^2}S+\frac{AC^2}{BC^2}S=S$ となること、つまり $AB^2+AC^2=BC^2$ となることを表している。

三平方の定理の一つの拡張として、各辺の上に正方形の代わりに互いに相似な図形をのせるというものがあるが、その図形として各辺を斜辺とする直角三角形を考えればまさに上の話となり、それはある意味で自明となってしまう。そしてそうなるのは、∠A が直角なために、そこから斜辺に垂線を下ろすと、できる２つの三角形の３つの角が元の三角形と等しくなってしまうからである。つまり、元の三角形の一つの角が直角であることが、三平方の定理が成り立つ理由に、確かになっている。一つの角が直角であるという直角三角形の中心的な特徴から、なぜ三平方の定理のような事実が生じるのかが、確かに説明されている。

中学校の教科書では、上の２つともさらに異なる証明が用いられる場合が多いようであるが、証明が説明的かどうかという観点で吟味をしてみると、違った風景が見えてくるのかもしれない。説明的とは、ショーペンハウハーの引用や理由を支える事実を参考に考えると、受け手から見た時の証明の“自然さ”ということなのかもしれない。上の説明的かどうか、あなたは気にしますか？

【算数・数学教育における IAQ に戻る】