因数分解と二面性

～または、かけ算の中性化～

令和４年度全国学力・学習状況調査数学問題 1 は、42 を素因数分解するという問題であった。正答率は 52.9 %であったが、6×7 などの不完全な分解による誤答は 1.3 %、1 を因数に含めた誤答は 1.1 %であったと報告されている。無解答は 11.3 %であり、最も多かったのは「上記以外の解答」の 33.3 %であった。上記以外の解答の事例として報告されているのは、42 の素因数や約数を列挙したという解答である。

ただ素因数分解で現れるかけ算は、算数で学習してきたかけ算とは、その表情を異にしているようにも思われる。強いて言えば後者が動的なニュアンスなのに対して前者は静的なニュアンスが強い。

かけ算の意味や順序の議論では、被乗数と乗数には異なる意味が与えられる。かけ算を累加により導入する場合はもちろん、$\varphi(m, n+1) = \varphi(m, n) + m$ を満たす $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への写像 φ として導入する場合でも、乗数には被乗数をたす回数といったニュアンスが出てしまう。つまり算数でのかけ算には、被乗数から積を作る操作が透けて見え、その操作のために動的に感じられる。こうした扱い方は、中学校第 1 学年の正負の数の学習でも維持される場合が多い。

一方、42＝2×3×7 と因数分解した際に現れる乗法では、各数に役割の違いも感じず、乗法に操作のニュアンスも感じないのではないだろうか。それは 21=3×7 と 2 項になっても同じである。ちょうど 10 個のおはじきを 3 個と 7 個に分けたことを 10＝3＋7 と表現した時に 3 と 7 に役割の違いもなく、7 を追加したという操作のニュアンスが希薄なのと同様である。むしろ 10 を 3 と 7 に分解した結果の状態や、10 は 3 と 7 の和という構造を表しているように感じる。

もしも算数や正負の数の計算までのかけ算が動的で、因数分解を観察するための乗法が静的であるとした場合、ここに二面性の議論を持ち込むならば、前者は乗法の操作的捉え方であり、後者は乗法の構造的捉え方であると見ることもできる。そして、操作的捉え方は多くの生徒にとって容易だが、構造的捉え方は数学が苦手な生徒にとっては難しいという傾向を想起するならば、上述の素因数分解の正答率があまり高くないことの背景にも、乗法の式を構造的に捉えられないという問題が潜んでいる可能性が考えられることになる。

生徒が素因数分解をうまくできない時に、そのやり方だけを教えても、生徒には何をしているのかがわかりにくいのかもしれない。そうだとしたら、素因数分解の結果を数の“構造”として見ることができるようになるための支援も、併せて行う必要があろう。さらには、科学で分子の構造を探ってみるように、数の“構造”を探ってみたくなるような生徒の興味・関心を育てることも必要なのかもしれない。それらは、どのようにすれば可能であろうか。

【算数･数学教育における IAQ に戻る】