

## 従属変数としての関数

現行の中学校教科書(2025 年版)での関数の定義が、“何を”関数と言うのか、“何が”関数なのかが明確でないとした時、一つの対応策は、現代化の頃の教科書のように、2 変数間の対応の規則や関係に関数とすることであろう。数学としてはさらに進めて、直積集合の部分集合として定義するかもしれない。いずれにしろ、“何を” “何が” をより明確にし、関数の正体がわかりやすい定義に書き換える必要があるのではないだろうか。

現行の定義を見ると「 $y$  は  $x$  の関数である」となっているが、「富士山は日本の山である」といった日常的な文の感覚で言えば、富士山が一つの山であるように、変数  $y$  が一つの関数であると読むのが普通ではないだろうか。ただ、このような素直な読みに従って「従属変数  $y$  が関数だ」と言うと、「そんなのおかしい」と言われてしまう。その考えがおかしいとすれば、なぜそのような誤解を生みやすい表現で教え続けているのか理解に苦しむ。

高校の物理などでは、位置  $x$  や速さ  $v$  が時間の関数である時に  $x(t)$ 、 $v(t)$  といった書き方をよくする。例えば、ある大学の学生向けの解説ページには、次のような式が載っていた。

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

関数をよく  $f(x)$  などと書くこと思い出すと、ここでは従属変数  $x$  や  $v$  自体が独立変数  $t$  の関数と捉えられているように見える。中学校の関数の理解は、高校のこうした学習にも接続しうるであろうか。

高校の数学では関数が「増加する」「減少する」という言い方もするであろうが、仮に関数を対応の規則として捉えていると、「対応の規則が増加する／減少する」となり「規則が変化」と奇妙な感じになる。関数が従属変数  $y$  であれば、「 $y$  が増加する／減少する」となり中学校での説明とも整合する。あるいは、関数の変化の割合を考える際も、「関数の変化」の割合なのであれば、関数は変化しうるものとしてイメージしている方が理解しやすい。それにつながるのは、対応の規則としての関数と言うよりも、従属変数としての関数であろう。

関数のグラフは、確かに各点の  $x$  座標、 $y$  座標に着目すれば、2 変数の対応を表現している。ただグラフを用いる際に私たちは、 $x$  の値は一定の割合で変化すると暗黙に想定しつつ、グラフの曲線を左から右へとなぞりながらグラフの縦方向の値の上下する様子、つまり  $y$  の値の変化や動きにむしろ注意を向けているのではないだろうか。その意味では「関数のグラフ」は実際のところ「従属変数の表

現」というニュアンスが強いように思われる。

さらに文字式の二面性の議論を思い出すならば、例えば  $y=ax+b$  の式は右辺から左辺への流れに着目すれば、 $x$  の値から  $y$  の値を求める手続き、いわば対応の規則を記述していると捉えることもできるし、左辺の正体が右辺だというニュアンスで見れば、変数  $y$  の内部構造とか仕組みが  $ax+b$  であると捉えることもできる。だとすれば、関数を対応の規則として捉えるか、それとも従属変数として捉えるかは、A. Sfard 先生の言葉を借りれば「コインの裏表」にすぎないのかもしれない。私たちは文字式の場合と同様、関数の式についても操作的捉え方と構造的捉え方を適宜、行き来しながら、関数を理解しているのであろう。

このように見てくると、私たちは実は、従属変数としての関数というイメージを背後に持ちながら、自分では適宜それを用いて関数に関わる事項を理解しているのではないだろうか。ただ、表向きには「従属変数自体は関数ではない」との立場に立つので、そうした背後のイメージは表には出さずに授業中は対応することになる。そうだとすれば、自分が理解しているイメージとはズレた状態で説明をするのであるから、説明も表面的となり、生徒からすればイメージは焦点を結ばないまま、表面的な手続きだけを受け入れていくしかない、ということになってしまいそうである。

もしも関数を対応の規則として本気で捉えるのであれば、そうとわかるように関数を定義し、またそれに沿った説明を常に心掛けるべきである。さらに関数が増加したり減少したりすること、より一般的には変化すること、そこから関数の変化の割合や平均変化率を考えること、さらには関数を微分したり積分したりすることについて、「関数とは対応の規則」というイメージからきちんと理解できるように指導をしていくべきであろう。

結局、私たちの指導は関数のどのようなイメージに基づいて構成されているのだろうか。またそれは少なくとも中学校や高等学校の範囲の学習であれば、学習内容の理解をちゃんと支えることのできるようなイメージになっているのだろうか。

【算数・数学教育における IAQ に戻る】