1次関数のグラフの傾きと解析幾何

中学校第2学年で1次関数を学習すると、$y=ax+b$ の a はグラフの傾き、b はグラフの y 切片であると学習する。ただ、7社の教科書の該当する個所を比べてみると、記述の仕方に微妙な違いがあるようにも見える(2026年度使用の版)。そして、その違いを比較しながら考えてみると、実はここに現れる“登場人物”の立場や関係について、教科書や私たち教師の側にも曖昧さがあるのではないかとも思われてくる。

(1) x の係数

第3学年で2乗に比例する関数 $y=ax^2$ を学習する際にも、a の符号や絶対値の大きさにより放物線の形状が変わることを学習する。しかしだからと言って、この a を「グラフの開き具合」などと呼ぶことはなく、第1学年の比例の場合と同様、比例定数と呼んでいる。つまり係数 a は関数の対応関係を特徴づける存在として位置づけられており、グラフの形状に影響を与えることは認めつつも、グラフの形状に応じた名称にはなっていない。

これに対し、1次関数の場合は、「傾き」というグラフの形状に当たる名称が与えられる。しかも、[グラフである]「直線の傾き」(啓林館、数研出版、大日本図書)や「グラフの傾き」(教育出版、東京書籍、日本文教出版、学校図書)と、傾きがグラフの特徴であることを明確にした名称となっている。関数自身に「傾き」という特徴を持たせる、ということではなさそうである。

「傾き」という概念が関数自体の特徴であるならばよいが、あくまで、その一表現であるグラフの形状の特徴であるとすれば、関数を規定する式の係数がその名称で呼ばれることは、改めて考えてみると、少し奇妙な感じがする。係数 a がグラフの傾きを決めるからと言って、a 自体を傾きと単純に同一視できないことは、$y=2x+3$ において独立変数 x の値が従属変数 y の値を決めるからと言って、両者を同一視できないことを想起すれば、明らかであろう。

(2) 直線とグラフ

関数 $y=ax+b$ のグラフは、点集合 $\{(x, y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y=ax+b\}$ であるが、$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ を2次元ユークリッド空間と同一視した場合にこの集合が直線になることから、1次関数のグラフが直線という平面図形になる、と主張することは妥当に思われる。しかし直線をグラフと同一視するのは、また話が別なように思われる。この場合、直線を座標平面の中で式を用いて扱うという点で、解析幾何の発想を背景に持つからである。

いくつかの教科書では、1次関数 $y=ax+b$ のグラフを「直線 $y=ax+b$」と呼ぶことを伝え、平面に座標軸を入れた上で直線を式により扱うというアイデアが導入されたことを、多少明確にしている。またいくつかの教科書では、こうした説明

は特にしないものの、本文の中で「直線 $y=ax+b$」といった、図形である直線を関数と同一視するかのような表現を用いたりもしている。

しかし、中学校第１学年までの学習では、比例のグラフが直線になることには触れてきていても、図形としての直線を座標軸の入った空間の中で考え、式で表現するといった経験はないであろうから、上のアイデアが自然に受け入れてもらえるのかは定かでない。直線が式により表現されることをこのようにあっさりと扱った場合に、その意味や意図は十分に伝わっているのであろうか。

第２学年ではこの後で、２元１次方程式の解集合を、「直線 $y=ax+b$」と同一視し(方程式のグラフ)、さらに２つのグラフの交点と連立方程式の解を同一視した上で、２つの関数のグラフの交点の座標を連立方程式を用いて見いだすことが扱われる。ここでは、３つの事柄、すなわち方程式の解集合－直線－関数のグラフを同一視することで、グラフの交点の座標を連立方程式を用いて求めることになる。直線が式で扱われた上に、方程式のグラフまで登場するので、慣れていない人には話がかなり錯綜して見えるのではないだろうか。また未知数と変数を別物のように学習した人には、話がつながりにくいかもしれない。

(3) 直線の傾き

中学校第１学年までの学習で、直線や線分が交わった際にできる角やその大きさについては、しばしば出会ってきている。しかし、直線に「傾き」というものがあることは、おそらく経験してきていないであろう。そうした中で、いくつかの教科書では「直線の傾き」が突然現れ、それが a の値により決まるという話になる。また「グラフの傾き」として語る場合も、グラフの傾きとは何かが説明されないままに、(1)のように「傾き」が $y=ax+b$ の a の名称になっていく。

いくつかの教科書では坂道や階段の場面で水平距離と垂直距離の比として傾きを説明している。しかし、平面にある直線の傾きとはどのようなものかや、直線の傾きは直線を座標平面の中に入れて初めて考えられるものであることなどは、やはり明確にはされていないように見える。

以上のように、１次関数 $y=ax+b$ の a を「傾き」と呼ぶことに関しては、直線の傾きという新たな性質が導入されたり、そのために直線を座標平面の中で考えるという新たな発想が行われたりし、その上で、式の係数をグラフの性質と同一視するという、いろいろなことが次々と説明される。さらに変化の割合という関数のローカルな特徴が関数全体のグローバルな特徴のように扱われた上で、それが「傾き」と関連付けられるので、話は一層複雑である。

私たちは、このあたりの議論の流れを十分に整理し、中学校２年生が受け入れやすい展開の仕方になるようにして授業ができているであろうか。

【算数･数学教育におけるIAQ に戻る】