

等分除の幻想

～「1あたり」を求めるのに「なぜ」わり算が用いられるのか～

小学校第3学年で初めてわり算の学習をする際、等分除と包含除の双方がていねいに扱われる。

「等分除」の名前からすると、「等しく分けるわり算」という印象がある。そして等しく分ける操作を通して、それぞれの「1つ」に分けられる数や量がわかるので、「1つ分の数／量」を求めるための演算としてもふさわしい感じがする。平均を求める際や単位量あたりの大きさを求める際にわり算が用いられるのも、第一の量を等しく“ならす”ことにより、第二の量の各部分に等しく分け与え、「等分」することになるので、その「1つ分の数／量」を求めるために等分除を用いるのだと理解できそうである。

実際、第3学年のわり算の導入時においては、例えば12個のお菓子を4人の人に、いわゆるトランプ配りをすることによって、等しく分ける場面が用いられる。12個のお菓子から、4人の人にまず1個ずつ配り、次にまた4人に1個ずつ配り、…としていくと、お菓子の個数が4の倍数であれば、この操作により4人に等しくお菓子を分けることができる。それにより、各自が何個もらえるかが確かにわかる。そしてこの経験を通して、同じ数ずつ分けるとき、「1人分の数」はわり算の式で表すことができるとして学習される。

こうしたトランプ配りは日常の様々な場面でも利用しているので、「等分する」操作として自然にも見える。ただ改めて考えてみると、トランプ配りは「等分する」操作として無理がある場合も多い。

トランプ配りは少しずつ解に近づけるという意味で逐次近似的な操作と見ることができる。すなわち、まずは「1人あたり1個」と考えて、それを4人に配る。しかしまだ手元に残っているので、「1人あたり2個」でも大丈夫と考え、さらにもう1個ずつ配る。この操作を続けて、手元になくなった時点で各自が持っている分が「1人分の数」になる。「1人数の数」を徐々に増やしていきながら、何個まで配れるかを調べているのである。

しかし紙テープを4等分するとかピザを8等分するという場合は、こうした操作はしないであろう。もしやったら、手元には細切れのテープやピザの断片が集

まってくることになる。テープであれば半分に折り、さらに半分に折るであろうし、ピザであれば十字に切って4等分にし、さらにそれらの間を切って8等分したりするであろう。

トランプ配りはちょうど、大きな容器に入ったジュースを4つのコップに少しずつ配りながら、全てがほぼ同じ量になるように調整していくような操作になっている。最終的に同じ量の入った4つのコップが得られるが、途中、ジュースをそれぞれのコップにちょびちょびと何度も配っていく操作は、テープを半分に折る操作のように「コップ1つ分の量」を“一気に”は生み出していない。

ある長さの紙テープがあり、長さを7で割るわり算を用いずに、それを7人に分ける場合もそうである。この場合も、トランプ配りに当たる操作ができないわけではないが、「1人分のテープ」は断片の集まりでしかなく、現実的な意味での「テープの等分」とは異なっている。

これに対して、8本の幅の等しい平行線にテープを当てて7等分するという操作は、断片の集まりではない1つにつながった「1人分のテープ」を“一気に”作り出している。こちらの方がテープを等しく分けている操作として、見えやすいと考えられる。

ただし、トランプ配りは汎用性は高いとも言え、例えば、ある粘土の塊を同じ重さになるよう7人に分けたいという場合にも適用できそうである。粘土を少しずつ7人に配っていき、その量を少しずつ増やしていくことで、最終的にはほぼ7等分された粘土の部分に分けることができよう。これは粘土が直方体のようないきれいな形をしていなくても用いることができる。

それでもまだ7等分だからよいが、これが「2.5等分」ならさらにややこしくなる。基本的には、小数が関わる「2.5等分」のようなことは考えることができない、と指摘されることも多い。

しかし少し工夫すると、この場合もトランプ配りができないわけではない。例えば2.5 mで495円のリボンについて1 mあたりの値段を求めるとする。この時に495円を「2.5等分」すれば1 mあたりの値段は求まる。1円ずつ配っていても面倒なので、例えば各1 mに一気に100円を“配る”こととする。この時、0.5 mに

対しては半分の 50 円を配ると考えることにする。残り 245 円から今度は、各 1 m に 90 円ずつ配り、さらに残りの 20 円から各 1 m に 8 円ずつ配るというやり方になろう。ただ 0.5 m には 1 m 分の金額の半分を配るといった比例的な調整が必要となり、「等しく分ける」というイメージからはさらに離れるかもしれない。

ここまで見てきたように、トランプ配りは等しく分ける操作として汎用性は高いものの、等しい部分を直接作り出しているようには見づらい。一方、テープを半分に折るとか、テープを平行線を利用して等分する、ピザを十字に切るといった操作は、いくつかの等しい部分を直接作り出していることが見えやすいが、汎用性は高くなく、等分するモノの種類や形状に大きく依存する。

ここから推測されるのは、等しく分ける操作をもとにわり算のイメージを発展させるのは難しいであろうということである。つまり、等分除から発展させて、等しく分ける行為をベースにわり算のまとまったイメージを作るのは難しい。割る数が小数になると、等分できないからという理由で、わり算は等しく分けるという意味ではないと指摘されるが、実際は、それ以前から「等しく分ける」という操作自体のイメージを持ちづらい状況が生じていると考えられる。

それでも等分除の発展として、「1 あたり分」を求める計算というわり算のイメージは、小数で割るわり算などでも用いられる。等分により「1 あたり分」を求める操作をわり算と結びつけにくいとすれば、何らかの操作の結果として全体が等分されて「1 あたり分」が確定した状態とわり算とを結びつける、ということになるのかもしれない。

12 個のお菓子を 4 人に分けるという場面で、トランプ配りという等しく分けるための操作はわり算とは特に関係があるわけではなく、トランプ配りが終了した時点で得られる「4 人に 3 個ずつ配られた状態」の方が、わり算が表現しているものだったということであろう。等しく分けるという操作が重要なのではなく、等しい数の 4 つ分で 12 個になっている状態こそが「等分」の本質だということになる。言い替えれば、ある個数の 4 倍が 12 個であるという状態である。これは、田村二郎「量と数の理論」などで、ある量 A と自然数 n に対して、 $U \times n = A$ と

る量 U を「 A の n 等分」と呼ぶことに類似している。

要するに $12 = \square \times 4$ の形に捉えることが「等分」ということになる。同様に考えれば、 $495 = \square \times 2.5$ の形に捉えることが「2.5 等分」ということだと言えよう(参考：小数倍の導入)。このように捉える中でわり算を考えるということは、かけ算の基準量を求めるための逆演算としてわり算を捉えることになる。等しく分ける操作にまとまったイメージがなく、等しく分けた後の状態に着目するとすれば、その状態はかけ算で表現できるので、結果としてかけ算の逆算という面に注意が向けられるのであろう。

以上のように考えると、等分除としてのわり算は、結局はかけ算の逆算ということになってしまう。こうした等分除の性格を考慮に入れたときに、第3学年で等分除を学習した後、それを高学年に向けてどのように発展させてわり算の理解を深めていくのか、その道筋はどのようなものになるであろうか。