算数・中学校数学に潜む無限

高校の数学では極限を扱うので、学習内容に無限が関わってくることは見えやすい。しかし実際は、中学校の数学にも、そして小学校の算数にも無限が潜んでいる。

中学校第3学年で無理数を学習するが、循環しない無限小数であるので、無限が関わっている。その点を私たちが常に意識していなければ、学習者は無限に起因する違和感を抱くことにもなる。例えば、小学校の筆算を念頭に置くと、右端を揃えられない2数を本当にたしたりかけたりできるのか。そもそも小数点以下が無限に続くものが数なのか。
算数では線分と特に区別せずに考えていた直線も、中学校では「限りなく伸びている線」になり、無限を含むという“正体”が顕わになる。平行も、その限りなく伸びた2本の直線が「交わらない」場合を指すことになるので、無限の中でチェックせざるを得なくなる。

そもそも直線自体が点の集まりとして捉えられる必要が出てくるが、点の集まりとしては当然、無限の集合であろう。特に数直線やグラフの軸の場合、直線は数の集合を表し、各点が数を表すことになるので、無理数の学習以前でも可算無限であり、無理数の学習後は非可算無限となる。関数のグラフも、xの値に対応するだけの点の集まりであるから、同様である。ということは、実数の集合の直積集合における部分集合としての関数も、無限の数対の集合となろう。

中学校で文字式を学習する場合、文字に数を代入することが想定されているのが普通であろう。特に代入する数の範囲に制限を設けていないとすれば、その時点で学習済みの数を集めた集合が、文字に代入できる数の範囲として暗黙的に認められている。こうした集合は無限であるので、1つの文字の背後には無限の集合が広がっていることになる。これは変数の変域についても同様である。

中学校第2学年で図形の論証を扱うようになると、「すべての三角形」などを考えることになる。三角形が全部でいくつあるのかをかぞえるのは難しそうであるが、例えば、それを辺の長さを基に実数の組として表すならば、実数の集合の直積となるので非可算無限だと考えられよう。また辺や対角線を点の集まりとみるのであれば、上述のように、ここにも無限が潜んでいる。

こうしたことは、小学校算数でも無関係ではない。

小学校第6学年で円の面積を求めることを学習するが、その際によく用いられる、円を平行四辺形に“等積変形”する際、有限個に切り分けた段階ではどうしても円弧の曲線が残ってしまうので、実際には無限個に切り分けることを想定しているように思われる。

円と言えば、第5学年で円周率を学習する際も、どこまでも続いて終わりのない数と補足するので、やはり無限が関わっている。この終わりのない無限小数を“数”として受け止めることは、5年生にはなかなかハードな課題かもしれない。そもそも円周率を考える前提には、「全ての」円において直径に対する円周の割合が等しいとか、それらが比例しているといった前提があり、その背景には「全ての」円が相似だという前提がある。つまり、「全ての円」という無限集合が前提になっている。

同様のことは、第5学年で分数をわり算を経由して小数に直す際に、$\frac{2}{3}$や$\frac{1}{7}$といった無限小数が現れる際にも起こりうる。循環小数とは言え、数字が無限に続くものを“数”として受け入れないと、分数とのつながりも不安になるかもしれない。$\frac{1}{3}=0.333\cdots$の両辺を3倍した時に、$1=0.999\cdots$をどう納得するかは、その端的な現れかもしれない。また分数学習についての海外の文献を読むと、分数の稠密性、つまりどのような2数の間にも分数が存在するという性質を、自然数にはない分数(というか有理数)特有の性質として、大切にしているように見える。例えば0と$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$の間には$\frac{1}{4}$があり、0と$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$の間には$\frac{1}{8}$があり…と続けると、0に近づく無限の数列が現れる。分数を数直線の上で考えると、実は自然に無限が関わってくるのかもしれない。

自然数の学習でも、私たちはどんどん大きな数を導入し、またそれに合わせて数直線もどんどん伸ばしていく。これができるのも自然数が無限に存在するからである。

こうした算数や中学校数学に潜む無限を、私たちは十分に意識し、そこに注意を払いながら指導してきているであろうか。大学時代に ε-δ 論法で苦しんだことを思い出せば、小中学生の困惑にも共感しやすいとは思うのだが。

【算数・数学教育におけるIAQ に戻る】