

負の数のシンプルな導入

中学校第1学年で負の数が導入される際、**向きの入った量**を日常場面も参照しながら導入し、それを表すために必要だとして**負の数**を導入する。しかし向きのある量と関連付けられる結果として、加法・減法の説明では**ベクトルのような話**になってしまったり、乗法の説明では算数で学習する速さと距離、時間の関係を速度と位置、時刻の關係に**勝手に読み替えたり**といった無理をすることにもなる。そもそも量に向きを入れ、それを表す数を考えたとしても、負の数が0より「小さい」とは**どのような意味**かははっきりしない。

例えば、“反数 (opposite)” とか**加法の逆元という発想**で負の数を導入してはダメなのであろうか。ちょうど「2乗して5になる正の数」として $\sqrt{5}$ を導入するように、「5に足すと0になる数」として -5 を導入するのである。

このように導入しても、これまで学習した正の数についての知識と、負の数が入っても交換、**結合**、分配という法則は成り立つようにするという想定があれば、大小比較や四則演算について考えることは可能である。

(1) 大小関係

$6+2$ と $6+3$ を比べると後者の方が大きい。これは $2<3$ だからである。逆にある数に足した時に和が大きくなる方の数を大きいと考えれば、 $6+(-5)=(1+5)+(-5)=1$ となり $6+0$ より小さくなるので、 -5 は 0 より小さいと言える。また同様に、 $6+(-4)=2$ となり $6+(-5)$ より大きくなるので、 -4 は -5 より大きいこともわかる。

以上では -5 が5と足して0になるという性質しか使っていないので、数直線の位置により0より小さいと判断しているわけではない。むしろ上のことにより -5 が0より小さいとわかることから、数直線上では0よりも、さらには -4 よりも左に位置付けた方がよいと判断することになる。

(2) 加法

正の数の方が絶対値が大きい場合の正の数と負の数の加法は、(1)と同様に考えることができる。正の数の方が絶対値が小さい場合、例えば $2+(-5)$ のような場合も、 $0=3+(-3)$ を利用すれば、 $2+(-5)=2+(-5)+3+(-3)=5+(-5)+(-3)=-3$ と計算できる。

負の数と負の数の加法、例えば $-2+(-5)$ はどうであろうか。これも $7+(-7)=0$ を利用すれば、 $-2+(-5)=-2+(-5)+7+(-7)=-2+(-5)+2+5+(-7)=-7$ と計算できる。

なお、 $2+(-5)$ は2より-5だけ“大きい”数を求めているが、 $2+(-5)$ に5を足すと $2+(-5)+5=2+0=2$ になる、つまり $2+(-5)$ は5を足して2と等しくなる数なので、2より5だけ小さい数だと言える。

(3) 減法

教科書でも除法は乗法の逆として考えているので、減法も加法の逆と考えれば、「負の数を引くってどんな意味？」と考えたり、それを量の操作で説明したりすることはしなくてよくなる。

$-5-3$ は、 $-5-3=\square$ とすると $-5=\square+3$ となる $\square$ を求める計算となる。ここで、3を足して-5が残るようにするには、 $\square$ を $-5+(-3)$ にすればよいであろう。そして加法の計算の仕方から $-5+(-3)=-8$ であるから $-5-3=-8$ ということになる。 $3-9$ についても $3=\square+9$ となる $\square$ を求めればよいので、 $\square$ は $3+(-9)$ となり、したがって $3-9=-6$ とわかる。

$-5-(-3)$ では $-5=\square+(-3)$ となる $\square$ を求めることになるので、 $\square$ は $-5+3$ となる。ここから $-5-(-3)=-2$ とわかる。

なお負の数の減法が正の数の加法に代わることは、 $\square$ を考える際に、減数と相殺するように減数の反数を足すからだとして理解されよう¹⁾。

(4) 乗法

分配法則が成り立つという想定から、 $(-5+5)\times 3=(-5)\times 3+5\times 3$ であり、-5の決め方から $-5+5=0$ なので $(-5+5)\times 3$ も0になることは言える。ここから $(-5)\times 3$ は15と足すと0になる数なので、-15ということになる。

また $(-5+5)\times (-2)$ は、交換法則が成り立つという想定から $5\times (-2)=-2\times 5=-10$ であり、 $-5\times (-2)$ は-10と足すと0になる数なので、10ということになる。

(5) 除法

(3)でも触れた通り、乗法は教科書でも乗法の逆として考えているので、乗法ができるようになったことで除法もそれを基に考えることができよう。あるいは小学校第6学年で、正の数の範囲ではあるが、除法は逆数の乗法に直せることを学習しているので、逆数の乗法として考えれば済むかもしれない。例えば、 $6\div(-2)$ であれば逆数を用いて $6\times\left(-\frac{1}{2}\right)$ と直し、これが $6\times\frac{1}{2}$ の反数であることから-3になることがわかる。

以上の進め方は形式的に過ぎると言われれば否定はできない。ただ、最初は0より“小さい”数²⁾として負の数を導入し、大小は数直線上の位置に基づいて決

めるが、加法・減法になるとベクトルのような矢印での説明になり、乗法では速さの公式をちょっとずらして援用し、そして除法は乗法の逆として形式的に扱うというように、説明の仕方やその拠り所をどんどん変えていく教科書の進め方に比べれば、上の進め方は負の数は反数という一つのアイデアだけに基いて全ての学習内容をカバーするという点で、教科書よりもシンプルな進め方と言えるのではないだろうか。

もしも上の進め方にもシンプルだという利点があるのであれば、教科書のような進め方が本当にこうした進め方よりも生徒にとってわかりやすいのか、ということについては、一度吟味してみる価値はあるのではないだろうか。そうした吟味の中で、少なくとも今の指導の問題点や、今よりは多少は生徒にとって自然な負の数の指導の仕方が見えてくるかもしれない。

- 1) 文字式の $(5x+2)-(3x-4)$ といった計算でも、 $(5x+2)=\square+(3x-4)$ となる $\square$ を求めると考えれば、 $3x-4$ と相殺した後に $5x+2$ が残るようにするために、 $\square=(5x+2)+(-3x+4)$ とすればよいことが、見えやすいかもしれない。
- 2) 0より1“小さい”ことを、上で度々用いたように、1を足すと0に戻ることとして捉えるならば、結局は「0より1小さい数を-1という」規定は、「1に足すと0になる数」として-1を規定する本稿の方法と同じことになるだろう。

【算数・数学教育におけるIAQに戻る】