

点と線

ユークリッド原論では点は「部分をもたないもの」、線は「幅のない長さ」と定義されている。「線の端は点である」こと、「直線とはその上にある点について一様に横たわる線である」ことは定義に見えるが、点を集めたら線になるのか、あるいは線は点の集まりでできているのかはよくわからない。ヒルベルトの幾何学基礎論では点や線が何かの定義もなく、「二点のおのおのと結合する」直線の存在について公理を述べるに留まる。

ネットの質問コーナーを見ると、点が集まって直線になるのがよくわからない、という質問が散見される。確かに考えてみると、「部分をもたない」、いわば大きさを持たない点が、たくさん集まると長さのある直線になるというのは、自明とは言えないような気になる。有理数全体の測度が0になると習ったような記憶があるので、なおさらである。無理数を学習する前なら数直線も有理数に対応する点を集めただけなので、実は“直線”ではないのかもしれない。

しかし中学校第1学年の教科書の中には、円周が「点」の集まりであると説明したり、「点」が動くことで線ができることを説明しているものがある。また関数の学習では、グラフは「点」をたくさんプロットし、それらが集まってできた線として説明される。さらに負の数も数直線上に表そうとする際には、負の数を表す「点」が話題になる。もしも数直線上のそれぞれの点が数を表すという想定なのであれば、数直線が点の集まりでできていることも暗黙に仮定されている（ちなみに算数では数直線の「目盛り」とされていた）。

このように中学校の数学の学習では、「点」の集まりが線であるという考え方がさまざまな場面で用いられている。「点をとる」という表現も、線が点の集まりであるならば、その多くの点から1つを「採る」ということになり、日常の感覚でも理解しやすいが、そうでないと、線の上に点を作ることを「とる」が表すことになり日常の感覚とはズレるかもしれない。

線が点の集まりであるという見方が重要であるとして、そうした見方はどこかできちんと扱われているのだろうか。仮に、コンピュータで点をたくさん打っていくと線になると見せた時に、生徒から「でもこの点は大きさがあるので本当の点ではないですね」と言われたら、私たちはどう対応できるだろうか。