位取り記数法と分数

位取り記数法は英語では place-value notation とか positional notation とか呼ばれるようであるが、”place-value”の名称は「位置が値」を表すという点で、わかりやすい言い方だと思う。小数点から左側に n 番目（$n \in \mathbb{Z}$）)の位置(負数の番目は右側を表す)にある数字は、10^n がいくつあるかを表すとして、どんな大きな数でもどんな小さな数でも 10 個の数字だけで表せるというスグレモノである。算数で学習する正の整数や小数はこの表記法により統一的に捉えることができる。

小数のことを英語で decimal fractions、つまり十進分数と呼んだりもする。各位の値が 10^n ($n=-1, -2, -3, \cdots$)の分数ということである。十進分数があるなら、五進分数や六進分数があってもよいと考えると、 $\frac{2}{5}$ や $\frac{5}{6}$ をそう呼んでもよいようにも思われる。もしも $\frac{2}{5}$ と $\frac{3}{5}$ の間の数を表したければ $\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$ のいくつか分で調節し、それでもダメなら $\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$ のいくつか分で補えば、と考えていくと、どのような数でも表せるであろう。

もしも位取り記数法の発想を分数にも生かすならば、このような方向になるのであろうが、実際には分数は整数などとはある意味で全く異なるロジックで構成されている。

(1) 無数の底

十進位取り記数法の 10 に当たる数を指数関数の場合に倣って「底(base)」と呼ぶことにした時、分数の学習では底を固定することなく、様々な底を併用する形を採っている。 $\frac{1}{5}$ では粗すぎるという場合、 $\frac{1}{5^2}$ ではなく $\frac{1}{6}$ や $\frac{1}{7}$ など全く異なる底を用いることになる。これが整数や小数とは異なる分数の特徴ともされるが、分数以外の整数や小数では底を 10 に固定していたことを思い出せば、全く異なる発想で分数は考えられているとも言えよう。

(2) 整数部分との二重システム

帯分数は整数部分と分数部分を並べて表示している。しかし整数部分は底が

10の位取り記数法であり、端下の部分は分母が10ではない分数、つまり底が10ではない分数を用いているので、結果的に2種類の底が1つの数字の中で混在している状態とも考えられる。

そのためか、端下の部分と整数部分との接続が独特の扱い方になっている。小学校第3学年で小数第一位までの小数を学習する場合、0.1、0.2、･･･、0.8、0.9と来たら、次は1つ大きい位に移り1になる。しかし分数の場合、例えば、$\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$と来たら、次はまずは$\frac{5}{5}$となる。小数と同じように考えれば単に1でいいはずなのに、まずは$\frac{5}{5}$として、その後でこれが1に等しいという話を始める。

ひき算の場合も1－0.7では、まず1は0.1が10個と考える。しかし1－$\frac{2}{5}$の場合は、単に1は$\frac{1}{5}$が5個とする前に、1は$\frac{5}{5}$に等しいからとわざわざ$\frac{5}{5}$を使うことが多い。微妙に異なるロジックを用いるので、分数の場合に繰り下がりをしているという意識は、私たち教師の側にも薄いかもしれない。

(3) 仮分数の使用

n進位取り記数法の場合、ある位の数がn–1を越えたら、次の位に移るが、分数の場合、(2)で見たように分子がnである分数を考え、さらには分子はいくらでも大きくなっていく。その結果、$\frac{3527}{5}$といった分数も考えることになる。小数第一位の部分には通常、0から9までの数字が入るのであり、3527は入らないことを思い出すならば、上の分数はこの点においてとても不自然である。

だからこそ日本語でも「仮」の分数と呼ばれ、英語でもimproper (不適切な、不作法な)と呼ばれるのであろうが、文字式を学習し$\frac{n}{5}$といった分数が出てきたら、nにはどのような数も入ると考えざるを得ないし、その場合はむしろ帯分数よりも仮分数の方が使いやすいことを考えると、中学校以降の数学の学習では仮分数の方が使い勝手がよいので、帯分数で通すというのも難しい。

(4) 筆算を使わない

分数は(1)(2)(3)で見たように位取り記数法とは異なるロジックで動くため、位取り記数法に大きく依存する筆算は用いられない。当たり前のことではあるが、算数の学習における計算として筆算のイメージが大きいとすれば、その点でも分数という数は子どもたちの数と計算のイメージからズレていると言えよう。

他にも、同じ大きさの数が無数にたくさんあることも、整数や小数とは全く異なる特徴であろう。これにより数と数字の間の対応が、1 つの数字の表記システムに限ったとしてもかなりややこしくなる。

以上のように、3 年生以降の小学生は、それまで慣れ親しんできた位取り記数法とは全く異なるロジックに基づいて、分数という数を扱わなければならない。私たちにしても、複素数では大小関係を考えないと言われると、数は大きさを表すのに使ってきたのに変ではないか、そんなものが本当に数なのかと思ってしまう。さらに環や体の公理を満たす集合は「数体系」であり、その要素は「数」である、「普通『数』と呼んでいるものと全然違うものでもいい」(ワイルダー, 1980, p. 187)と言われると、なおさら戸惑ってしまう。

そう思うと、小学生が分数を整数や小数と同じ数と考えることに抵抗があっても、むしろ自然なのではないだろうか。逆に「分数って本当に数なの？」と問われた時に、「こういう理由で分数も数なんだよ」と的確に説明できる人は、案外少ないのではないか。

そのような分数の特殊性を十分に踏まえた上で、分数を算数で学習する数としてきちんと位置づけ、小学生にも数の一種だと理解してもらえるような手立てを吟味する必要がある。量と結びつけて考えれば済むというものではないであろう。

【算数･数学教育における IAQ に戻る】