割合と単位量あたりの大きさ

速さの公式を単位をつけて書くと、「距離(m)＝速さ(m/s)×時間(s)」となる。ここで、こうした量の乗算では単位も文字などと同じように計算してよいという、理科の人がよくやる考え方を使うと、右のようになろう。ここでは秒速 3 m で 150 秒(150 s)走り、450 m 進んだ場合を考えている。

$$450\ \mathrm{m} \quad = \quad 3\ \mathrm{m/s} \quad \times \quad 150\ \mathrm{s}$$

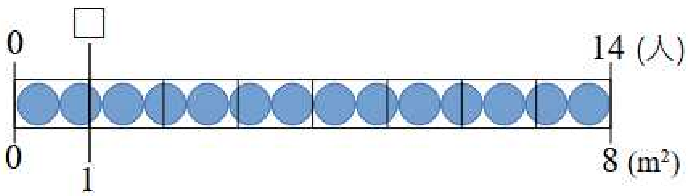
$$450\times \mathrm{m} = 3\times\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\times 150\times \mathrm{s}$$

$$450\ \mathrm{m} \quad = \quad 3\ \mathrm{m} \quad \times \quad 150$$

一番上の式は、上の速さの公式そのままであるが、真ん中の式で s を約分のように消すと、一番下の「長さ 3 m の 150 倍は 450 m である」という、倍関係の式になる。

このように形式的にやるとうさんくさい感じがするが、算数で単位量あたりの大きさを求める際にも、同じ関係を用いている。

例えば平成 28 年度学力・学習状況調査算数 A 問題 4 は 8 m^2 のシートに 14 人座っている時に 1 m^2 あたりの人数を求める式を書く問題であったが、問題には次のような図が添えられていた。



全体が８等分されているが、これは、面積 8 m^2 が 1 m^2 の８倍なので、1 m^2 分を求めるには８等分したうちの１つ分を求めればよいことを示唆していよう。そして 14 人を８等分することから、14÷8 というわり算を思いつきやすくするための図と考えられる。実際、この時の正答率は 72.0 %で、単位量あたりの大きさの問題としては比較的高いものであった。

教科書でも等分を示唆する図を示すものもある。また、単位量あたりの大きさの直前に学習され、単位量あたりの大きさへ接続していると思われる「平均」の単元では、ジュースを５等分するといった図が見られるので、単位量あたりの大きさをわり算により求めるという考え方は、この等分の考えに支えられている

と見ることができる。

つまり「□人/m^2×8 m^2＝14 人」となる□を求める際に、これを「□人×8＝14 人」と読み替えて、８倍して 14 人なので８等分することで□を求めると考えている。上の速さの例で言えば、「450 m＝□ m/s × 150 s」となる速さ□ m/s を求める際に、「450 m＝□ m × 150」と読み替えて、450 m を 150 等分することで　1 s あたりに進む距離を求めることであり、前ページの図式そのものである。図式のような量の形式的な計算と同様のことを、単位量あたりの大きさの導入では行っていると見ることができよう。

このような形で、同種の２量の割合と、単位量あたりの大きさは密接に関連している。他方で、倍関係に基づいて求めた「1 m^{2}の人数」や「1 秒で進んだ距離」を、「1 m^2 **あたり**の人数」や「1 秒**あたり**に進む距離」として捉え直し、対象や事象の質を表す指標として用いていく点に、単位量あたりの大きさの学習の、割合とは異なる独自性があるのではないだろうか。

また前ページの 「450 m＝3 m×150」では 150 s だから 1 s の 150 倍進むと考えている、つまり時間から「何倍か」を取り出しているが、「450 m＝3 m/s×150 s」の方では 150 s を 150 s という時間のまま扱うことができている。時間に対して距離を対応させることができているとも言える。そしてこれを可能にしているのが「3 m/s」という速さである。言わば速さは、時間に距離を対応させる写像を決めている。「450 m＝3 m×150」が距離の空間内部のスカラー倍であるのに対して、「450 m＝3 m/s×150 s」は時間の空間から距離の空間への写像になっていると考えると、Vergnaud が scalar operator と function operator と呼ぶのもよくわかる。

ただこの「1 m^{2}の人数」と「1 m^{2}あたりの人数」の区別、「1 秒で進んだ距離」と「1 秒あたりに進む距離」の区別は、明確には扱われていないのではないか。

さらに、両者の理解には違いも見られる。同種の２量の割合を求めることは、一種の測定として理解することができる。基準量により比較量を測りとった時の測定値が割合だとする考え方である。これはそのまま小数倍や分数倍の考え方にも適用できる。しかし単位量あたりの大きさには適用しにくい。単位量あたりの大きさを“測定値”と見るためには、“距離を速さで測る”といったことを考えざるを得ない。

もちろんいわゆる第３用法の除法がその“測定”にあたると解釈することは可能かもしれないが、割合の測定が小学校第１学年で学習する任意単位による

測定とまったく同義であるのに対し、第３用法に基づく“測定”の解釈はそうではない。その意味では、操作的な理解をベースにできるかどうかという点で、割合と単位量あたりの大きさには違いがあるように思われる。

また単位量あたりの大きさが function operator だと考えると、scalar operator よりも子どもにとって難しい概念であろうことも想像がつく。

しかし単位量あたりの大きさは、初めて出会う除法による組立量(derived quantity)という意味では、今後の科学全般の学習にとって重要であろう。量の乗法・除法が新たな量を生み出すということの経験でもあり、単位量あたりの大きさを新たな“量”として子どもたちに捉えてもらえるかは、大切な問題であると考えられる。組立単位を用いずに組立量のイメージを持ってもらうところに、単位量あたりの大きさの学習の難しさがあるのかもしれない。比により生まれるという点では同じであるが、無次元量になる倍や割合と、組立量になる単位量あたりの大きさとを、どのように関連づけたり区別したりするのがよいのであろうか。

【算数･数学教育における IAQ に戻る】