

比例・反比例と離散量

主に算数での話であるが、比例や反比例を考えている時に、個数など離散量の場合はグラフもとびとびになり比例や反比例と言えないのではないかと、ということが話題になるときがある。ここで気になるのは次の2点である。

第一に、こうした指摘をされる場合に、**定義域という視点**が欠けているのではないかとということである。第二に、**定義との関わり方**が適切なのか、という点である。

ソーンダース・マックレーンはその著書「数学：その形式と機能」の中で、いくつかの関数の定義を吟味し、「 x の各値に対して、対応する y の値を与える規則」といった定義も、「対応する」とか「規則」とかの意味が定義されていないと指摘した(p. 164)後、次のような関数の定義を与えている(p. 167)：

「集合 X から集合 Y への関数 f とは、順序対のつくるある集合 $S \subset X \times Y$ であって、各 $x \in X$ に対し、第1成分が x であるような対 $\langle x, y \rangle$ が S の中にちょうど1つ存在するようなもののことをいう。」

そして $\langle x, y \rangle$ の第2成分を関数 f の x での値と呼び、 $f(x)$ と書くこと、および X を f の定義域、 Y を値域と呼ぶことを補足している。

この定義を見ると、まず最初に定義域となるはずの集合 X が宣言されている。マックレーン先生のこの定義に限らず、数学における関数の定義を見ると、だいたい、最初に特定の集合 X と Y を提示し、その上で「集合 X から集合 Y への関数 f 」を考えるのではないだろうか。

もしも算数における比例や反比例でも、算数では学習内容として関数は扱わないとしても、気持ち的には関数の素地的な経験として扱っているのだとすれば、ある種の関数があり、それが特定の特徴を持つときに比例あるいは反比例と呼ぶというスタンスということになる。だとすれば、算数の場合には明確に宣言はしないとしても、個数などを扱う場合には、まずは非負整数からなる離散集合 X を考え、そこから例えば非負実数値の集合 Y への関数を考えればよい。その上で、比例や反比例の定義を満たすのであれば、離散集合からの関数であっても、比例や反比例と呼ぶことには、問題はないように思われる。上の定義中の順序対の集合 S も離散的になるだろうが、その場合はダメとは定義には書かれていないようである。

またグラフはまさにこの「順序対のつくるある集合 $S \subset X \times Y$ 」であるから、 X が離散集合であれば、とびとびのようになって問題はないと考えられる。

第二の定義との関わり方で言えば、比例の定義の中に x が連続でなければならない、あるいは離散の場合を除くといった条件が付されているのかが問題になろう。算数の場合、[比例の定義はおおよそ以下のようなもの](#)となっている。

ともなって変わる 2 つの量 \square と \bigcirc があって、 \square が 2 倍、3 倍、…
となると、 \bigcirc も 2 倍、3 倍、…になるとき、 \bigcirc は \square に比例するといひます。

ここで「2 つの量」については、「ともなって変わる」という条件はついているものの、特に連続量でなければならないとか、離散量の場合は除くといった文言は見あたらない。例えば、1 個 120 円のたいやきを何個か買うとき、個数と代金は「ともなって変わる 2 つの量」であるから、代金が個数に比例すると考えても、上の定義に特に抵触する部分はない。中学校の比例の定義に照らしても、同様であろう。ある個数の $\frac{1}{2}$ 倍に当たる個数が存在しないという場合もあろうが、存在しない場合についてまで、代金が $\frac{1}{2}$ 倍になっていることは求められていないので、その点も問題はなかろう。

離散量の場合にグラフがとびとびになるから比例ではない、と考える背景は、結局、離散集合からの関数という可能性を数学的に検討せず、また比例の定義に抵触するのも検討せず、グラフは連続した直線や曲線という“イメージ”に縛られたことではないかと思われる。Vinner 先生が昔提唱された概念イメージの一例なのかもしれない。

関数や比例・反比例の定義に沿って考えず、それまでの経験に基づくイメージにわれわれが引っぱられたのだとしたら、見た目で判断して、正方形はながしかくではないから長方形ではないとか、ダイヤのマークのようなひし形は平行四辺形ではないと考える子どもたちを笑えない。純粹に定義に沿って考えることは、それだけ難しいのかもしれない。

[【算数・数学教育における IAQ に戻る】](#)