無理数であることの証明

$\sqrt{2}$が無理数であることの証明は、しばしば話題になり、目にしたことのある中学生も多いであろう。しかし中学校第３学年の学習に限っても、当然、$\sqrt{2}$以外にも様々な“無理数”が出てくる。それらがすべて無理数であることを、私たちは確認した上で指導をしているであろうか。

自分自身はこれまできちんと確認したことがなかったので、覚書として、ここで、いろいろな数の平方根が無理数であるのかを考えてみたい。

例えばaが正の無理数の場合あれば、２つの互いに素な自然数m、nを用いて$\sqrt{a}=\dfrac{n}{m}$と書けたとすると、両辺を２乗したときに$a=\dfrac{n^2}{m^2}$となり、aが無理数であることに矛盾する。したがって、aが正の無理数であれば、その平方根は無理数とわかる。

正の有理数の場合は、もちろん、その平方根は無理数になるとは限らない。では、どのような場合であれば平方根は無理数になるであろうか。

互いに素な自然数をa、bとした時に、２つの互いに素な自然数m、nを用いて$\sqrt{\dfrac{b}{a}}=\dfrac{n}{m}$と書けたとする。両辺を２乗すると$\dfrac{b}{a}=\dfrac{n^2}{m^2}$。ここから$an^2=bm^2$。

最後の式に関してわかることとして、次のようなことがある。

・自然数a、bは互いに素であるので、aの素因数は全てm^2の中にあり、bの素因数は全てn^2の中にあるはずである。m、nも互いに素であるので、m^2の素因数は全てaの中にあり、n^2の素因数は全てbの中にあるはずである。

・aの素因数は全てm^2の中にあるので$a \leqq m^2$。m^2の素因数は全てaの中にあるので、$a \geqq m^2$。よって$a=m^2$。同様に$b=n^2$。

以上より、正の有理数$\dfrac{b}{a}$の平方根が有理数になるための必要条件は、aもbも平方数であることである。

また、aもbも平方数であることは明らかに、$\dfrac{b}{a}$の平方根が有理数になるための十分条件になっている。

こうした確認をしておけば、6や15は平方数ではないので、$\sqrt{6}$や$\sqrt{15}$を安心して無理数として考えることができると思うのだが、いかがであろう？

【算数･数学教育におけるIAQ に戻る】