量と数

算数や中学校数学で数やその計算を指導する際、量を用いて指導している。小学校第1学年で自然数を指導する際は、個数や動物の匹数などの離散量が用いられる。小数と分数を指導する際は、長さや液量などの連続量が用いられる。中学校で負の数が導入される際も、山の高さや海の深さや、東に進んだ距離と西に進んだ距離といった向きを持った量が扱われ、無理数が導入される際は正方形の面積とその辺の長さが扱われる。

こうした指導において、私たちは量と数がどのような関係にあると想定しているであろうか。

量と数を同一視するという考え方もあるかもしれない。しかし、例えば「5 m」という長さの表現において、「5 m」は長さであっても、「5」だけでは長さではなく、これは数だと考えるのであれば、量と数は区別されることになる。しかし、無理数の導入では「面積5の正方形」といった表現もされるので、「5」だけでも量なのかと思える場面もある。

小学校から中学校までの数と計算の学習を一貫したのものとして捉えられるようにするには、量と数との関係をどのように想定すべきなのだろうか。そこが曖昧だと、授業の中で量を通して数を学習しているようで、結局は量の話だけで終わってしまう危険性もあるように思われる。量の方がわかりやすいし、手を動かした活動などもしやすいので、ついついそこに留まりがちだからである。

とりあえず数と計算の学習で用いられる個数や長さ、面積、液量のように、多い／少ないや大きい／小さいを比較できる特性を「量」と考えたとして(気になる人は外延量に制限して考えていると思って下さい)、「数」の方はどのように捉えることができ、「量」とどのような関係にあると言えるだろうか。

数を数学的に捉える一つの仕方として、ペアノの公理や空集合から出発して自然数を構成し、自然数のペアにある種の同値関係を入れてその同値類として有理数や負数を構成し、デデキントの切断や基本列の同値類として実数を構成するというものがよく見られる。これは数学的には厳密なのであろうが、厳密にするためにむしろ量を避けるようになっているので、結果として、量を用いて指導を行う算数・数学教育としては参考にしにくい。

そのような中で、数学的な構成を目指しながらも、量に基づいて数を構成しよ

うとする試みとして、田村二郎先生の「[量と数の理論](#)」が知られている。そこでは自然数は量空間の倍変換として、分数は m 等分変換と n 倍変換の合成として、負の数は分数倍と対称変換の合成として論じられている。つまり、[数は量の変換](#)ということになる。

この本は 1978 年に数学セミナーでの連載を基にしているが、その連載は 1977 年に同誌で連載された [小島順先生の連載](#) も参照しており、また本のはしがきには、1942 年の [南雲道夫先生の論文](#) からの影響も述べられている。この論文との関わりが [河田敬義先生の論文](#) で述べられ、また南雲先生ご自身も 30 年ほど後に新たに [書き直している](#)。数が「変換」と言われると妙な感じも受けるが、上のよう一部の数学者の間では昔からそれなりに支持された見方のようなのである。また、数学教育においても、宮下英明先生が [数は量の比](#) であるという、河田先生と近い表現に基づき多くの論文を著されており、全くなかった考え方というわけではない。

数が「変換」と言われると違和感があるかもしれないが、基準量から別の量を作る操作と捉えれば、分数の指導とはむしろ親和性のある考え方とも言える。また、数える活動の捉え方によっては、自然数の場合にも適用できそうである。（参考：[整数と分数の学習の比較](#)）

この捉え方が絶対的なものではないかもしれないが、少なくとも量と数の関係を明確にしてくれる一つの捉え方ではある。量を通して数の指導を行うためには、この捉え方のように、何らかの形で量と数の関係を明確にする枠組みが必要である。

では、現在の算数・数学教育では、どのような枠組みが採用されているのであろうか。そもそも、量と数の関係を明確にした上で、量を利用した数の指導が行われているのであろうか。

【[算数・数学教育における IAQ に戻る](#)】