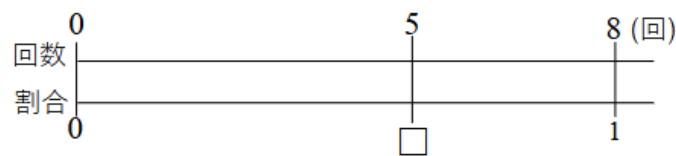


割合と単位量あたりの大きさ（２）

単位量あたりの大きさの導入では倍や割合の考えが用いられる、といった関係もあるが、他方で、単位量あたりの大きさを「異種の２量の割合」と特徴づけることには無理もある。

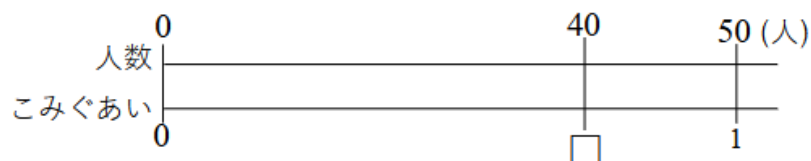
割合と単位量あたりの大きさが基本的に異なることは、教科書で使われるいわゆる二重数直線にも現れている。

割合や倍の学習の際の二重数直線は、次のようになっている。



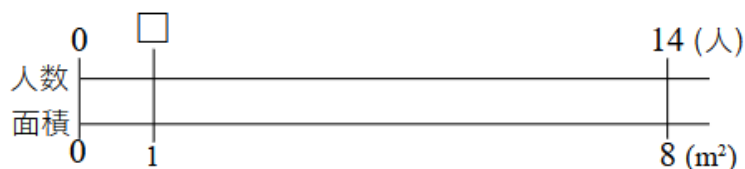
割合の定義にそって「8回を1とみたとき、5がいくつにあたるか」と考えながら数直線を見ると、上段の8回が下段1に対応すると考えた場合、5回は下段のいくつに対応するかを考えている。割合が小数という数で表されているので、これは回数という量から実数への対応関係ということになる。そして、割合は下段の数直線上に現れることになる。またここでは、回数と割合が比例関係にある。

割合の学習でしばしば現れる列車やバスの混み具合の場合も、割合として考える場合は、次のような数直線になる。



混み具合は百分率で表されることも多いが、例えば国際単位系第9版では、%は単純に数字で表現することができる「単位1の量」(邦訳 p. 36)で説明されており、%がついた表現も一種の数字と見ることができよう。実際、ある教科書では、1%を「割合を表す0.01のこと」だとしている。したがって、上の数直線も人数という量から実数への対応関係を表している、と見ることができ。ここでも混み具合は下段の数直線の上に現れる。数直線は、 $f(50)=1$ となる比例関数を表し、割合は $f(x)$ の個々の値である。比例定数は1と見る大きさの逆数になる。

同じ混み具合であっても、単位量あたりの大きさの学習で用いられるタイプの数直線では、次のように表されることになる。



ここでは人数と面積という2量の対応が問題にされ、比例関係にあるのもその2量である。そうしたこともあり、単位量あたりの大きさは数直線の上には現れない。確かに、その値だけであれば□に入る数値と等しくなる。しかし上段の数直線はいくまで人数を表すのであり、単位量あたりの大きさは「人数」という量とは異なるであろうから、□自体は単位量あたりの大きさではないはずである。

そうではなく、面積を表す下段と人数を表す上段との“対応関係”自体が単位量あたりの大きさと言えよう。数直線では、下段から上段に向かう矢印で表すことができそうではある。その対応を線形写像 $F(x)$ とすると、 $x \text{ m}^2$ に対する値 $F(x)$ は人数であり、割合の場合とは異なり、その値は単位量あたりの大きさではない。単位量あたりの大きさは、写像 F 自体やその比例定数である。したがって、1つの数直線全体が1つの単位量あたりの大きさを表すとも言える。

このように見てくると、 1 m^2 分の人数である□を、比例定数と読み替え、2量の間の対応関係を考えるという点、言わばある種の ratio を rate と読み替える点に、単位量あたりの大きさのポイントがあり、そこにむずかしさもあるのかもしれない。また比例定数を感覚的に捉えるには、単位量あたりの大きさを、全体を代表するサンプルのように見なすことも必要なのかもしれない。

割合も単位量あたりの大きさも2量の相対的な関係だとしても、関係づけられる2量が、割合では上段の同じ数直線上にあり、単位量あたりの大きさでは上下の異なる数直線上にある。Vergnaud が指摘する scalar と function の違いは、教科書の数直線に見られるこうした違いに端的に現れている。割合も比例定数的に捉えようとする人は、ratio を勝手に rate にしようとしているのである。

逆に数直線に現れる違いを意識した上で、割合や単位量あたりの大きさの指導を私たちは吟味しているであろうか。同種でも異種でも割合だとかわり算で

求めるからといった安易な発想で、両者をひとくくりにしていないだろうか。吟味が不十分であれば、それぞれの学習内容の重要な点や困難な部分も見誤ることになる。いずれも理解がむずかしいとされる内容であるから、ここは慎重に吟味し、それぞれの特徴や困難さに基づいた指導のあり方を考えたい。

【補 足】

異なる種類の量を同じ数直線の上にのせることはできないとすれば、単位量あたりの大きさを割合の数直線のように考えることもできない。しかし、割合については、同じ回数でも「投げた回数」と「入った回数」を別の量とみなしたり、同じ人数でも「定員」と「乗客数」を別の量とみなしたりすれば、単位量あたりの大きさの数直線のように表すことは可能であろう。

例えば、上の割合の学習での混み具合の場面で、「定員」と「乗客数」を別の量とみなせば、下のような数直線にかくことができる。



この場合、単位量あたりの大きさの数直線と同様、定員と乗客数との対応関係が問題とされ、その対応関係の比例定数が割合ということになる。上でいけば、上段と下段の対応は「0.8 倍」の関係であり、定員をもとにした乗客数の割合 0.8 はその対応関係の比例定数になっている。

こうした数直線がかかれることはあまりないかもしれないが、同じ割合になる数量のペアをたくさん作って、その共通点を探るといった学習は、今の数直線に近いイメージで割合を捉えていることになる。また割合の学習で、2 量の**比例関係**という**前提**を強調する場合も、今の数直線のようなイメージに基づいていることになる。他方で、冒頭で示した数直線に比べると、今の数直線では、「**基準量を 1 と見る**」「**比較量はいくつにあたるか**」という割合の定義に現れる考え方は見えづらくなる。

【算数・数学教育における IAQ に戻る】