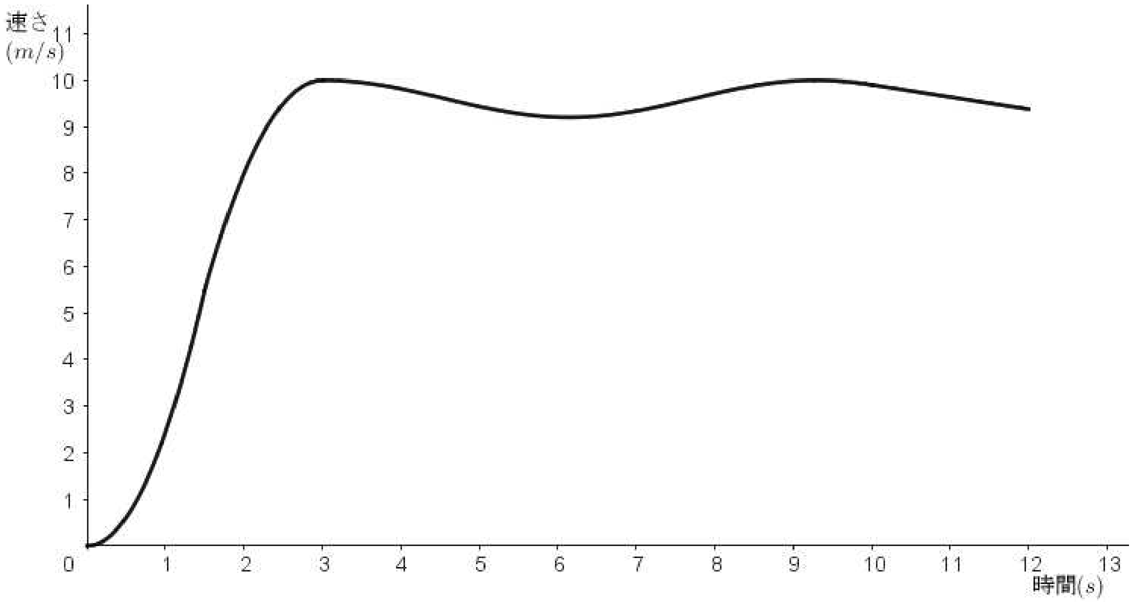
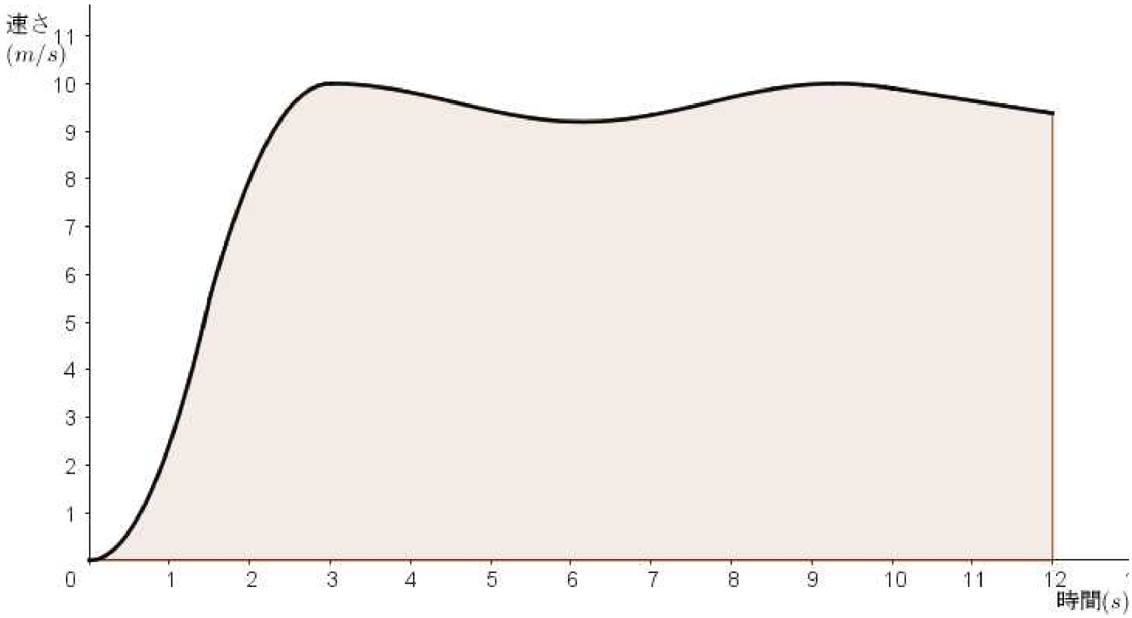
平均の意味と面積の公式

ある人が 12 秒間走るとき、徐々に加速し、トップスピードに達した後、多少の減速と加速を経て、最後は疲れて徐々に遅くなっていったとすると、時間にともなう速さの変化は以下のようなグラフになりそうである。



このとき走った距離は、この速さのグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積になるのであった。

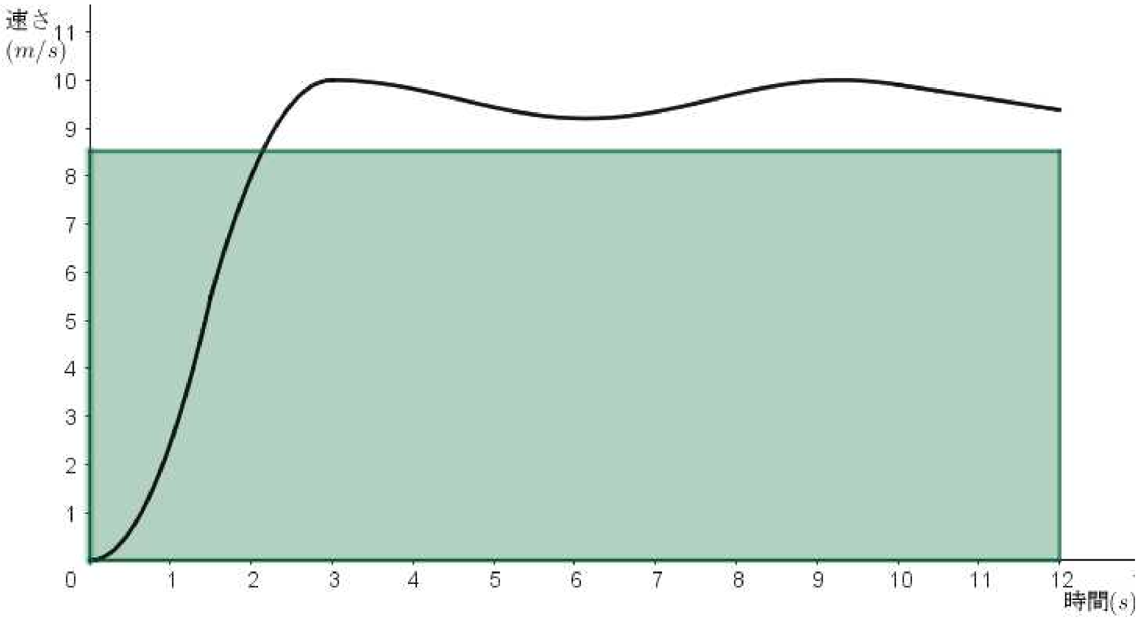


今のグラフで面積を求めると 102.24 m となる。12 秒間で 102.24 m を走ったの

で、小学校第５学年で学習する速さの学習に基づけば、この時の平均の速さは、

$$102.24 \div 12 = 8.52$$

より、秒速 8.52 m となる。8.52×12＝102.24 なので、この 8.52 は面積が 102.24 になる下のような長方形の縦の長さである。



つまり当たり前のことではあるが、平均値の 8.52 は 12 とかけたときに 102.24 となる値を求めていることになる。

速さの場合は、シートやマットの混み具合に比べると、均す操作がイメージにくい。しかし上のように 12 秒間を考える場合であれば、1 秒間あたりに進む距離が一定と<u>仮定する</u>と、全体の距離を 12 等分すれば 1 秒間あたりに進む距離が求まるので、全体の距離を 12 で割ればよいことはわかりやすい。ただこれが 11.58 秒間だったり 12.04 秒間だったりした場合は、11.58 や 12.04 で割るとなぜ 1 秒間あたりに進む距離が求まるのかは、それほど明らかではないように思われる。

それならむしろ、速さを“均して”一定にするというのは進む距離が進む時間に比例すると仮定すること、平均値はその時の比例定数と考える方がわかりやすくないだろうか。上の長方形のイメージで、横の長さをかけると面積になるような縦の長さを求めるということになる。

いくつかの卵の重さの平均にしても、重さを均すのは難しいので、これも「個数にかけると重さの合計になるような重さ」を平均の重さと考える。そうなると、均等に分ける操作に基づいたわり算により平均の意味を捉えるよりも、均質

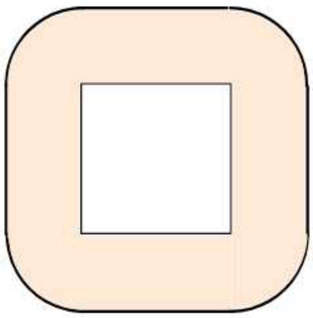
化された状態に基づいたかけ算により平均の意味を捉える方が自然ということにならないだろうか。同じ状態が一様に続いている時に、その一様な状態の指標が平均だということになる。

もちろんかけ算の中の1つの数値を求めるにはわり算を用いるが、平均を求めるわり算はあくまで求め方なのであり、平均とは何かのイメージにつながっているのかは、改めて考えてみる必要はありそうである。

一方、平均をかけ算で捉え直すと、「全体の個数で割る」が見えづらい部分[1]にも「平均」を感じることができる。

上の速さの場面に現れた「面積の等しい長方形を考える」というアイデアは、速さと同じ小学校第5学年で学習する三角形などの面積の公式の際にも現れる。高さが上の事例の時間に当たると考えると、三角形の面積の公式に現れる「底辺÷2」や台形の公式に現れる「(上底＋下底)÷2」の部分は、底辺などの長さの“平均値”を表していると考えられる。上底から下底に向かう中で、上底に平行な線分の長さはいろいろに変化するが、その平均値をとれば、同じ面積と高さの長方形を作ることができる。

また、中学校第3学年の文字式の利用の学習では、右のような図形の面積が、道の中央をたどる長さに道の幅をかけることで求めるということがしばしば扱われる。この場合も、道の中央をたどる長さが、内側の道から外側の道に至るまでのさまざまな道の長さの“平均値”だと考えることができるかもしれない。このときの中央の正方形の1辺が0となり、消失した状態を考えると円になる。その時、この円と中心を共有する様々な同心円の円周の“平均値”が πr であり、それに半径 r をかけたものが円の面積ということにもなりそうである。



さらに高さ方向に長い柱のような直方体を、居合いで巻藁を切るように、平面で斜めに二等分したことを考えると、その体積は底面積に「もとの高さ÷2」をかけて求められる。この時の「もとの高さ÷2」も、切断面部分の様々な高さの平均だと考えられる。

このように考えると、さまざまに変わる要素を1つの値で代表させるモノとしての“平均値”は、いろいろな場面で見いだすこともできそうである。逆にそうした展開の中で“平均”がいろいろな形で現れるのを経験すること、そしてそうした“平均値”に共通して見られる特性や役割に触れることが、単に総数を個数で割るといった求め方を越えて、平均の意味を豊かに、平均の理解に深みを与えるのかもしれない。

1) もちろん総和を積分で捉え直し、個数を積分区間の長さで読み替えれば、「個数で割る」こともできるであろうが、小5で学習する際の「個数で割る」ほどは明らかではないので、「見えづらい」としている。

【算数・数学教育におけるIAQ に戻る】