

証明の意義

証明の意義について、中学生が十分理解できていないということは、調査などでも指摘されることである(例えば、平成30年全国学力学習状況調査数学A問題8)。そうした問題があるとするれば、まずは、教科書でそれがどう扱われているかが検討されてもよいであろう。

中学校第2学年の教科書で「証明」という用語が出てくる部分を見ると、確かに多くの教科書では、証明をすることにより「どんな三角形でも」言えるとか「いつでも成り立つこと」が言えるといった説明がなされている。「証明」という用語が出てくる部分の近くにそうした説明を見つけることができない教科書も見られるが、多くの教科書では「証明」が導入された時点でその意義を説明しているように見受けられる。

ただし「どんな三角形でも」言えるとか「いつでも成り立つこと」が言えるといった説明がなされている場合でも、「なぜ」そのように言えるのかの理由まで説明されているか、という問題がある。特に理由は示されず、単に証明をすると「いつでも成り立つ言える」とだけ説明しているように見えるものもあるが、証明をすると「なぜ」そのように言えるのかの理由がわからないと、それこそ本当にそうなのかが生徒にはよくわからないであろうし、そのために証明の意義が感じられにくくなるように思われる。

理由が書かれてあったとしても、生徒に納得しやすいものであるかの問題がある。既習の性質を使って結論を導くのでいつでも成り立つという説明も見られるが、この場合、「既習の性質」を用いると「なぜ」いつでも成り立つことが言えるのかは明らかだろうか。おそらく用いる「性質」の特性がいつでも成り立つことを保証するのであろうが、その部分ははっきりとは説明されていない。

「具体的な値」を使っていないという説明は、証明が確かに辺の特定の長さや角の特定の大きさには依存しないことを保証している。その一方で、値ではなく「何を」用いた説明なのか、そしてその用いたものが「なぜ」いつでも成り立つことを保証するのは、やはりはっきりとは説明されていない。

証明で用いるものは、仮定とされる条件であろう。そしてその条件は「具体的な値」ではなく、辺や角といった要素間の関係である。証明は、その要素間の関係

を、「既習の性質」を利用して結論とつなげていく。だから、仮定が成り立っている時、つまり同じ要素間の関係が成立している場合であればいつでも、どのような場合でも、同じ議論を行うことができるはずであり、したがって、その議論から得られる結論も示すことができる。

つまり、当然ではあるが、「どのような場合」「いつでも」というのは、仮定の条件、仮定で示された要素間の関係が成り立つ限りにおいての「どのような場合」「いつでも」であるはずである。そして、「なぜ」そのように言えるかの理由は、同じ要素間の関係が成り立つ場合なら、いつでも同じ議論をくりかえすことができるからである。

これで説明になっているのかについては賛否もあろうが、証明の意義を中学生に納得してもらうために、証明により「なぜ」いつでも成り立つことが言えるのかの理由を、中学生に説明する必要はあると考えられる。生徒に理由を説明するよう求めるのであれば、私たち教師もまた理由を説明すべきであろう。数学者の用いる証明はともかく、少なくとも中学校や高等学校の数学で私たちが扱う証明が「なぜ」いつでも成り立つことを保証するのか、いわば「メタ学校数学」の証明を行うことが求められる。

(参考：証明のゆっくりめの練習)