

無理数を含む加法の表現

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が $\sqrt{5}$ とならないことは、教科書でも確かめている。

では、ある有理数 r を選んで、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{r}$ とすることはできるのだろうか。つまり、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を 1 つの平方根の形で表すことはできるのだろうか？ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ という「+」の入った形よりも $\sqrt{r}$ という形の方が、1 つの数としては受け入れやすいとすれば、そうした疑問が生じて不思議はないように思われる。

2 つの互いに素な自然数 p と q を選んで $r=\frac{p}{q}$ と表し、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{\frac{p}{q}}$ と表せた

と考える。両辺を平方すると $5+2\sqrt{6}=\frac{p}{q}$ なので、これを变形して、

$$\sqrt{6}=\frac{p-5q}{2q}$$

となる。つまり上のような p と q を選ぶことができるなら、 $\sqrt{6}$ が有理数になってしまう。したがってそうした自然数を選ぶことはできないので、有理数 r を選んで、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{r}$ とすることはできないとわかる。

では、せめて、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=3+\sqrt{r}$ といった形で、整数部分を明確にした表し方は出来ないものであろうか。そこで、整数 n と有理数 r を用いて $\sqrt{2}+\sqrt{3}=n+\sqrt{r}$ と表せたとして、 r としてどのような数を選べばよいかを考えてみる。

両辺を平方すると $5+2\sqrt{6}=(n^2+r)+2\sqrt{n^2r}$ となるので、 $n^2+r=5$ 、 $n^2r=6$ となる n と r を求めることになる。ただ、これを n^2 と r の方程式と思って解くと、 $n^2=2$ または $n^2=3$ となってしまう、そうした整数を見出すことができない。この程度の考察では、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ をもっと簡単な形で表すことは無理そうである。

もっと他の形であれば可能性があるのかもしれないが、いずれにしろ、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ の和としては $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ というこのままの形が最も簡単な形なのだというを示すことは、意外とめんどろなようである。もしも中学校3年生でこうした疑問を持っている人がいたら、私たちはどのように説明ができるだろうか。

他方で、 $2+\sqrt{5}$ をこのまま数と考えてよいかについて中学生が話し合いをするという事例もあるので、工夫によっては上のことも中学生が話し合う素材になるのかもしれない。