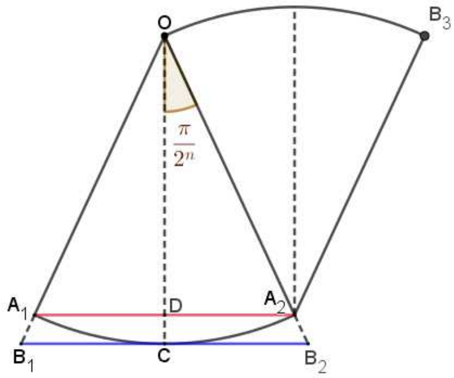
円の「平行四辺形」への等積変形

小学校第 6 学年で円の面積を学習する際は、円をオレンジのように 2^n 等分したものを組み合わせて、底辺が πr、高さが r の“平行四辺形”に等積変形することで、面積が πr^2 となることを説明している。



2^n 等分したときの 1 つのピースは右の図のようになっている。

このとき、平行四辺形の高さは隣合う扇形の一番高いところ(弧 OB_3 の真ん中の部分)と一番低いところ(点 C)の高さの差と考えられる。これは半径 r に DC の長さを加えたものになる。DC の長さは半径 r から OD の長さを引いたものであるから、結局、次のように考えることができよう。

$$
\begin{aligned}
r+\mathrm{DC} &= r+(r-\mathrm{OD})\\
&= r+\left(r-r\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\\
&= r\left(2-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)
\end{aligned}
$$

ここで等分の仕方を細かくするということは、n の値を大きくしていくということであるから、cos の値は $\cos 0=1$ に近づき、長さ全体は r に近づくことにはなる。ただ逆に言えば、極限を取らずにいる間は cos の値は 1 ではないので、結果として全体の長さも r にはならないとも言える。例えば、教科書でよく出てくる円を 64 等分した場合、つまり n=6 の場合を考えると、全体の長さは r の約 1.0012 倍となる。半径が 10 cm であれば、全体の長さは 10.012 cm である。10 cm と考えてもよいレベルとも言えるが、0.012 cm の膨らみがあるとも言える。

底辺については、実際は、弧 A_1CA_2 をつなぎ併せたものになっているはずである。他方で“底辺”と見るということは、これを弦 A_1A_2 (図の赤い線分)と同一視していることであり、DC だけ浮いた状態を無視して、平らに延ばしたと考えていることになる。どのくらい浮いているかと言えば、ちょうど DC の分だけ浮いている。そして DC の長さは上で見たように $r\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$ である。これも等分の仕

方を細かくすれば0に近づくが、ただ厳密に言えば0にはならないので、いつでも少しだけ浮いた状態だとも言える。A_1やA_2がCの高さまで下がってくることが直線に近づくことだと考えた時、直感的にはそうなりそうには思われるが、他方で、あくまで弧は曲線なので、やはり湾曲した状態がずっと続くのではないかと考える子どもがいてもおかしくはないし、上で見たように、直線として完全に平らにはならないという意味ではむしろ正しい。

さらに、曲がっていることでできる弧A_1A_2の長さと弦A_1A_2の長さの違いは１つ１つのピースでは微細でも、等分の仕方を細かくするとピースの個数は増えるので、全体としてはそれなりの長さになるかもしれない。

円を2^n等分した時の弧A_1A_2の長さは円周の2^n分の1となる。一方、弦A_1A_2の長さはA_1Dの2倍であり、A_1Dの長さは $r\sin\frac{\pi}{2^n}$ である。以上より、両者の差は次のようになる。

$$\frac{2\pi r}{2^n}-2r\sin\frac{\pi}{2^n}$$

“平行四辺形”への等積変形では、底辺の長さとしては、全体の2^n個のピースのうち、半分の2^{n-1}個を集めた長さを考えるので、弧と弦の長さの違いも上の各ピースでの違いを2^{n-1}倍したものになる。

$$2^{n-1}\left(\frac{2\pi r}{2^n}-2r\sin\frac{\pi}{2^n}\right)=\pi r-2^n r\sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$=\pi r-\pi r\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}$$

よく知られたように、式の最後の部分に出てくる分数は、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$という結果を用いれば、$n$が大きくなる時に1に近づくことはわかる。なので、円の等分を細かくすると、弧A_1A_2の長さと弦A_1A_2の長さの違いは0に近づくことになる。ただこれも途中から0になるわけではないので、円を教科書のように“平行四辺形”に等積変形した時、両者は厳密には等しくならないとも言えよう。半径10 cmの円を64等分した場合、両者の差は0.0126 cmとなる。

6 年生に極限の話をするわけにいかないとすると、「それでも円だから曲がっているのではないか」という疑問を持った子に私たちがどう対応できるかは、意外とむずかしいのかもしれない。円の面積を納得してもらい、なおかつ極限にもつながるそうした疑問を蔑ろにして彼らの数学的センスをつぶさないようにするには、どのような対応ができるだろうか。

【算数・数学教育における IAQ に戻る】