文字式の方程式風な変形

中学校第1学年の方程式の学習では、係数が小数や分数の場合に、両辺に10や分母の公倍数をかけて係数を整数に直すという手続きも学ぶ。学習者の中に、その手続きを今度は、文字式の計算の際に“適用”してしまう人がいる。例えば、

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}=6\times\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}\right)=x+2 \quad \cdots①$$

$$\frac{x+2}{6}=6\times\left(\frac{x+2}{6}\right)=x+2 \quad \cdots①'$$

他方で、次の変形であればもちろん許されるであろう。

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}x+\frac{2}{6}=\frac{x+2}{6} \quad \cdots②$$

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}x+\frac{2}{6}=\frac{1}{6}(x+2) \quad \cdots③$$

そして、こちらの変形は等式の中で用いても問題ない。

②や③の変形はよいが①や①’の変形はできないことは、①や①’は等式の場合にしか使えないから、と説明すればよいようにも思う。ただそれだと、「この場合はこう、こっちの場合はこう」と場合ごとのやり方を教えているだけのような気もする。

もしも意味を大切にして指導をしたいと思うならば、できれば「なぜ」①や①’の変形をしてはいけないのかを、生徒にも納得してもらいたいところではある。

単純な理由としては②と③では変形前と変形後の式が“同じ”なのに対し、①や①’では前後で式が“同じ”ではなくなっているから、ということになろう。では2つの式が“同じ”かどうかはどうやって確認できるのであろうか。

許されている式変形のみで一方から他方が導けているかは、一つの確認方法になろう。しかし今の場合は、ある変形を施してよいかで困っているのであるから、この確認方法では話が堂々巡りになりそうである。

別の可能性としては、xにいくつか数を代入してみて、いつでも同じ値になるかを確認することが考えられる。ただし生徒が納得してくれるためには、この確認方法自体が生徒にとっても自然なものになっている必要がある。困ったときに

急に持ち出しても受け入れにくいかもしれないと考えると、２つの式が“同じ”であるとわかりやすい時や、逆に“同じ”でないと納得しやすい時に、代入により確認する作業を継続的に行い、そうした確認の仕方が生徒にとっても普通のことだと感じてもらっておく必要があろう。

例えばであるが、8+4 という式があったときに、これを 6 倍して 6×(8+4)にしても式として“同じ”であると考える生徒はそうはないであろう。ましてや 12 という数があったときに 6 をかけて 6×12 としても“同じ”だと考える人はほとんどあるまい。①や①’の変形が許されないのは、基本的にはそれと同じことである。①’であれば、 $\frac{1}{6}$ に 6 をかけて 1 にできないのと同じであるとも言える。

同様の変形が方程式では許されるのは、8+4＝12 である時には全てを 2 倍にして 16+8＝24 も成り立つのと同じことであろうし、②や③が許されるのは 8＋4＝2×(4＋2)や 12＝3×4 と書き替えるのなら許されるのと同じことであろう。

逆に言えば、①や①’が納得しにくいことの背景には、 $\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$ や $\frac{x+2}{6}$ といった文字式を数式や数と同じようには感じていない、という理解の状態があるのかもしれない。その意味では式の二面性が関わっている可能性もある。上の代入は、文字式を構造的に捉えられず、操作的な捉え方に留まっている場合でも可能な確認方法になりそうな気がする。

①のような誤りをする生徒が式の操作的捉え方に留まっている可能性が高いとすれば、代入などを通して式が“同じ”にはならないことを通して、文字式が１つの数を表していることを実感してもらい、その感覚を通して文字式の構造的な捉え方への移行を促す機会として生かすことも考えられるのではないだろうか。

【算数･数学教育における IAQ に戻る】