算数・数学の理解と教師の語り方

数学者 Charles Wells 先生が作成されていた abstractmath.org 2.0 というホームページの中にある Mathematical Objects のページに、次のような記述がある。

> 数学者は数学的対象をモノ(things)のように考えている。抽象数学を理解するためにはあなたもまたそのように考える必要がある。

そして次のように続けている：「ここでは数学的対象について私たちがどのように考えたり語ったりするかについて議論しているのであり、数学的対象が本当はどのようなものかについて議論しているのではない」。

このページが引用している文献の一つである David Tall 先生たちによるカプセル化の対象に関する論文[1)]にも、次のような似た一節がある：「[数学的対象に関して]問題なのはそれが何かではなく、それで何ができるかである」(p. 229)。直前に、「概念に関係した全ての心像、結びついた性質やプロセス」からなる概念イメージが数に対象としての身分を与えるとも述べているので、「それで何ができるか」にはイメージや性質、プロセスに基づいて推論をしたり語ったりすることが想定されているように見える。

Tall 先生たちは数学的対象に限らず、「動物」といった高次のカテゴリーも何か単一のイメージと結びついているというよりも、それが有する諸性質や関係によって支えられていること(p. 229)、そして対象はその諸性質や他の対象との関係、それが用いられる仕方により記述されること(p. 230)を指摘している。数学的対象もそうした支えられ方や記述のされ方が基本となるのであろう。実際、Mathematical Objects のページには、次のように書かれている。

> 数学的対象について知ることができる全ては、その諸性質、それに適用できるプロセス、他の数学的対象との関係だけである。

Wells 先生は最初の引用に見られるように、数学的対象が物理的対象と同じように考えられたり語られたりするとしている。これは、ユニコーンのような架空の動物やシャーロック・ホームズのような小説の登場人物とも同じような扱われ方だとも指摘している。物理的対象と異なり、架空の動物や小説の登場人物を直接見た人や触れたことのある人は(ほとんど)いないであろうにも関わらず、それらについて“知っている”人の間では、それらについて話をすることができ

るし、ある人の話についてその“誤り”を皆が指摘することもできる。

それらは基本的に「諸性質、適用できるプロセス、他の対象との関係だけ」だとしても、それに基づいて話が盛り上がる中で、そうした性質を持つ“モノ”、そのプロセスを適用できる“モノ”、他の対象とそうした関係にある“モノ”が何となくあるような感じになるだと思われる。逆にその“モノ”に何らかのプロセスを適用した結果や、その“モノ”の性質や他のモノとの関係からの帰結を考えていく中で、その“モノ”をもっと知りたいという興味･関心も生まれ、その“モノ”についての話が盛り上がっていくのであろう。

教科書の関数の定義は曖昧に思われるが、ある性質を持つ対応の規則や、直積集合のある性質を持つ部分集合などとして定義することはできる。それでもおそらく、その規則や部分集合が関数の「実体」という感じはせず、ある性質を持ち、合成や微分、積分といったプロセスを適用する“モノ”としてそれぞれの関数を感じているような気がする。

Tall 先生たちは数 5 なども数学的対象としている。数 5 もペアノの公理や集合などを用いて数学的に構成したり、量に対するある種の倍変換として既定することはできようが、特定の大きさを持つわけではなさそうに思う。この場合も、ある性質を持っていたり、他の数と一定の関係を持っていたり、さらに計算といったプロセスを実行したりできる“モノ”として、数 5 を感じているであろう。「数の分解・合成」という表現には、数を粘土のように 2 つに分けたり、くっつけて 1 つにしたりできるモノとして見ている感触が生きている。

図形は目に見えるようにも思われるが、いわゆる「一般の四角形」などになると目には見えないし、図にもかけない。図形の定義などを中心にある種の性質を持っていたり、他の図形とある種の関係にあるような“モノ”として考えるしかないのではないだろうか。

関数、数、図形などの数学的対象がこうした形でしか「経験」できないのだとすると、こうした抽象的なものを理解してもらうためには、私たち教師が授業の内容を、その“モノ”についてのストーリーを展開しているとわかるように語り続けるしかないのではないだろうか。シャーロック・ホームズが“人”と感じられるように小説が語り続けられるのと同様、関数や数、図形が“モノ”として感じられるように、授業でストーリーが語り続けられる必要があろう。

もしも私たちが関数のグラフや式について語りながらも、関数という“モノ”自体の性質や関係などについて語ることが少なければ、生徒たちには関数という数学的対象を感じることができず、そうした対象と向き合うこともないので、それを主体的に探究しようという気持ちも生じにくいと危惧される。数が量の表現としてのみ用いられたり、数の計算が技能の習得だけのために行われるならば、数を数学的対象として感じることはできにくいだろうし、証明が数学的対象の理解を深めるものでなければ、図形という数学的対象すら生徒には感じてもらえないかもしれない。

私たち教師は、あたかも存在しているかのようにして、数学的対象の性質や対象間の関係を語っているであろうか。そもそも、私たち自身はそうした数学的対象が存在していると実感しているであろうか。私たちが関数や数、図形といった対象を実感し、その存在する対象に「関して」性質や関係を語り続けられないのだとしたら、生徒がそうした対象を理解することも難しい。というよりも、生徒にとってはそれらは理解したり探究したりする対象とはなりえないのではないだろうか。

1) 雑誌掲載時の論文はここから。

【算数・数学教育におけるIAQ に戻る】