対応から変化を捉えているか

現代化の頃(1971 年)の啓林館の教科書では、中学校第 1 学年の関数単元の冒頭に、次のような説明があった。

「このような変化では、一方の値と他方の値がどのように対応しているかを調べ、その対応のきまりを見つけることによって、変化のすがたがとらえられる。そのために、値の対応のようすを表にしたり、グラフにかいたり、また、対応のきまりを式に表したりする。」

中学校で対応に基づいて関数を考える理由を、「変化のすがたがとらえられる」からだと明確に説明しているように見える。もちろんこの教科書も断わっているように、こうした「変化の調べ方は、小学校でも、簡単な場合について学んでいる」。そうすると、中学校で「それをさらに進めていく」といった時に、算数で扱った「簡単な場合」に対して、より難しい場合が扱われると考えられる。そうした“場合”とは変域に負の数を含む場合を指すのかもしれないし、あるいは 1 次関数や関数 $y=ax^2$ の場合を指すのかもしれない。

ただし、「対応のきまりを見つける」のは「 変化のすがたがとらえられる」からだとして学習を進めていくとすれば、「対応のきまり」を見つけたからこそ「変化のすがた」がよりよく捉えられた、という経験を、学習者ができることが大切になる。中学校の関数の学習において、そうした経験ができる機会を、私たちが生徒に提供できているのかが問題となろう。

例えば、中学校第 1 学年の教科書でしばしば見られるような、水槽に水を入れる場面を考えてみる。期待するような水位になるようにするには、時々水槽を見に行けばよい。しかし、それをしなくて済むようにするには、水位の変化を水を入れる時間との関係で捉え、ある時間が過ぎたら見に行けばよいと考えられる。水位の変化と時間の関係を捉えるためには、例えば 1 分おきに水位を測定し、それをデータとして表に整理したりするであろう。あるいはそのデータを表計算ソフトに入力し、プロットした状態を表示させてみるかもしれない。

この時点では、水位と時間との対応により捉えようとはしているが、対応のきまりはまだ現れていない。これが現れるのは、表に整理したデータを観察し、特に表の縦方向の数値の関係を言語化や式化したり、表計算ソフトにプロットした点を結ぶ近似曲線をかかせ、その曲線の式を表示させたりした段階であろう。

他方で、表を横方向の数値の関係に着目して変化の特徴を捉えたり(時間が 1 分経過するごとに水位は 2 cm ずつ上昇する、経過時間が 2 倍になると水位も 2 倍になる等)、近似曲線の概形から変化の特徴を捉えたりする(ずっとほぼ同じよう

に水位は上昇している、急に水位が上がるようなことはない等)段階では、対応のきまりはまだ現れていないものの、“変化のすがた”をある程度は捉えることができている。そして、ここまでのことであれば、小学校での学習の範囲で行えることであろう。

では、「対応のきまり」に基づいて「変化のすがた」を捉えることが明確になるのは、どのような段階であろうか。高等学校の範囲になるが、微分や導関数は変化のようすを細かく調べているように思われる。そして、それらが元の関数の式に対する操作により得られていること、そして関数の式は 2 変数の対応のきまりを表現していることを想起すると、もしも変化の割合を関数の式に基づいて調べることが行われれば、それは、「対応のきまり」に基づいて「変化のすがた」を捉えることがかなり明確になりそうである。例えば、

$$\frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a$$

として、1 次関数の変化の割合が x の値によらず常に一定であるとか、その変化の割合の値は関数の式の x の係数に等しいといったことを示せば、「対応のきまり」から「変化のすがた」を捉えたと言えるのではないだろうか。特にこのような示し方では、x の値によらずにいつでも成り立つことが保証される。

しかし中学校第 2 学年の教科書では、こうした扱いにはなっておらず、関数の式から一度、表を作り、表中の数値を用いて変化の割合をいくつか計算し、帰納的に上のような特徴を導いているように見える。変化の割合を求めるという点では生徒にとってわかりやすい展開なのかもしれないが、「対応のきまり」から「変化のすがた」を捉えることは見えづらいのではないだろうか。

グラフについても、表を作ってからグラフをかき、その特徴をグラフの上だけで確認するので、やはり「対応のきまり」から「変化のすがた」を捉えているようには見えづらい。むしろ「対応のきまり」は扱いづらいので、一度、表やグラフに直して考えましょう、というストーリーに見えてしまう。つまり、上の「対応のきまり」がまだ現れない段階に戻ってしまっている。

文字式の操作を通して新たな情報を得ることに生徒が慣れていないとすれば、数値に基づく帰納的な導出も仕方がないのかもしれない。しかしその場合であっても、「対応のきまり」を中心に事象を捉えなおすこと、そうしたきまりの雛形として関数を学習することの意義は、どこかで保障する必要があるのではないだろうか。

【算数・数学教育における IAQ に戻る】