多様な考えと授業の論理のねじれ

中学校３年生の平方根の授業で、3と $\sqrt{10}$ の大小を比較する場面があった。その先生はしっかりした方で、生徒自身にその大小を、理由を含めて考えてみようと課題を設定した。普段からそうした授業をされているらしく、生徒たちも自然に自分たちで考え、次のような４つの理由が出された。

(1) 面積10の正方形より面積9の正方形の方が大きいので、それぞれの１辺である $\sqrt{10}$ と3についても、$\sqrt{10}$ の方が3より大きい。

(2) $\sqrt{10}$ は約3.16なので $\sqrt{10}$ の方が3より大きい。

(3) それぞれ２乗すると9と10になるので、$\sqrt{10}$ の方が3より大きい。

(4) 3を根号を用いて表すと $\sqrt{9}$ となるので、$\sqrt{10}$ の方が3より大きい。

途中で生徒から根号の中の数の大小で比べてよいという意見も出された。教師は４つの考え方を発表してもらった後でこの意見を取り上げて、$a>b$ のとき $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ となることを板書してまとめた。

４つの考えはどれも一理あるように思われるが、同時に、聞いていて何となくしっくりこない感じも受けた。改めて考えてみると、その理由と結論を結ぶステップが、そこまで学習した内容で納得できるかという点において、4つの間に違いがあるように思われてきた。

(1)については、$\sqrt{10}$ は初期の段階では面積10の正方形の１辺として理解されているであろうし、面積10の正方形と面積9の正方形を端をそろえて重ねてみることで、前者の辺の長さが後者の辺の長さより長いことは確認できる。ここから、(1)の論理は、この時点の中学校３年生でも納得ができそうである。

(2)に現れる近似値については、それ以前の学習で扱っているし、小数どうしの大小比較は算数の学習で経験しているので、(2)の論理も、中学校３年生が納得することはできる。注意すべきことがあるとすれば、$\sqrt{10}$ 自体の近似値をそのクラスで扱ったかということであろう。

(3)は、2つの正の数 a, b について、「$a^2>b^2$ ならば $a>b$」という命題を用いている。$y=x^2$ のグラフを学習した後であれば確認しやすいが、そのグラフは未習であるので、グラフを利用した確認をすることはできない。直前に学習した因数分解を利用すれば、$0<a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ より $a-b>0$ でなければならないことは示せるが、こうした説明を事前に扱っていない場合、今の時点で急に扱っても、

中学生にはあまりぴんとこないかもしれない。$a<b$ とすると $a^2<ab<b^2$ となり矛盾だと背理法で示すことも、中学生に対して説得力を持つかは疑問であろう。

もちろん、小さい数どうしをかけた積より大きい数どうしをかけた積の方が大きくなるはずだから、$a^2>b^2$ であるなら、もともと $a>b$ だったはずだ、という発想は、感覚的に明らかとも言える。そうした感覚的な説明でよいのであれば、「$a>b$ のとき $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ となる」こと自体、最初から自明とも言える。

(4)は、2つの正の数 a, b について「$a>b$ ならば $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ 」という命題を用いているが、そもそもこれは今、新たに示そうとしていた命題であるから、説明としては適切とは言えない。また $\sqrt{a}=c$、$\sqrt{b}=d$ と置けば、結局「$c^2>d^2$ ならば $c>d$」を用いているので、(3)と同様の問題を抱えることになる。

生徒からの多様な考え方が生かされたように見えるこの学習場面ではあるが、今のように考えたときには、次のような問題があると言えよう。

- 既習のどのような知識に基づいて、どのような新たな知識が確立されたのかが曖昧になるかもしれない。
- 新たな知識を支える説明の中に、多くの生徒に納得しにくい、あるいは納得してもらっては困る論理のステップが紛れ込んでいるかもしれない。

子どもたちに理由を考えてもらうことは、算数・数学でも大切なことであるし、また子どもたちから多様な考えが出されることも、大切なことである。ただ、令和6年度全国学力･学習状況調査数学問題9で解答類型5が9.1％いたことからもうかがえるように、子どもたちは理由の説明の中で、説明すべき内容を使ってしまう場合もある。その場合にどのように対応するかは、考えてみると難しい問題のように思われる。そのまま特に注意をせずに受け入れれば、上で見たような論理のねじれが生じてしまう。かと言って、説明として誤りだと単に指摘して排除したのでは、多様な考えを促すという雰囲気に水を差すような感じもする。

もちろん、授業の論理をシンプルにしすぎてしまい、短答的な問いの繰り返しのようになり、生徒の自由度が失われてはよくないであろう。しかし、多様な発想を重視しすぎ、何に基づいて新たに何が明らかになったのかが曖昧になることも、また避けなければなるまい。そうしたバランスについて、十分に吟味された上で、授業が行われてきているであろうか。

【算数･数学教育におけるIAQに戻る】