分数の意味が様々あるというのは本当か？

算数における“分数の意味”とはどのようなものかを AI に尋ねたところ、次のような「五つの意味」を示してくれた。

(i) 分割分数（操作による意味）

ピザや折り紙などの「1 つの具体物」を等分（同じ大きさに分ける操作）し、そのいくつ分かを表す意味です（例：1 枚の紙を三等分した二つ分が$\frac{2}{3}$）

(ii) 量分数（普遍単位による意味）

$\frac{2}{3}$ m や$\frac{2}{3}$ L のように、1 m や 1 L といった「決まった単位（普遍単位）」を基準にして、実際の量（長さ・かさ・重さ）の大きさを表す意味です。

(iii) 割合分数（関係による意味）

ある量（基準量）を「1」とみたとき、もう一方の量（比較量）がどれだけの割合にあたるかを表す意味です（例：「6 個の$\frac{1}{3}$は 2 個」「A は B の$\frac{2}{3}$倍」）。もとの大きさによって実際の数が変わる「相対的な見方」が必要になります。

(iv) 商分数（演算の結果としての意味）

整数の割り算 $(a \div b)$ の商（答え）を$\frac{a}{b}$と表す意味です（例：2 L のジュースを 3 人で等分した 1 人分は $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ L）。

(v) 数としての分数（数直線上の点としての意味）

具体的なモノや単位から離れ、整数や小数と同じように「数直線上の 1 つの点（大きさ）」として抽象化された意味です（例：$\frac{3}{2}$は 1.5 と同じ位置にある数）。

同様のことは小学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説算数編にも載っており (p. 153)、算数教育でも言及されることが多い。また、2 m を三等分した時の一つ分の長さを$\frac{1}{3}$ m と考える児童は“割合分数”を“量分数”と混同している、などとして特徴づけられ、それに応じた指導が提案されたりもする。そうしたこともあり、分数が上のように多様な意味を持つことが、分数を理解する際のむずかしさを引き起こすと考える先生もあるようである。

もちろん上述の学習指導要領解説でも「これらは便宜上分けたところ」もあり、「指導に当たっては，幾つかの考えを同時に用いることが多い」(p. 153)ともされているので、五つが独立した“意味”であるとは必ずしも想定されていな

いようではある。しかし、そもそも上のような五つを、異なる意味として区別する必要があるのだろうか。またそれぞれがどう異なっているのかは明確であろうか。

例えば「A は B の$\frac{2}{3}$倍」という時、量 A の量 B に対する関係を表しているが、その数値である$\frac{2}{3}$はどうやって決めているか、考えてみる。

「割合を表す数は、基準量を単位とした比較量の測定値であるともいえる」(学習指導要領解説, p. 218)という考え方を参考にすると、分数の部分は、B を単位として A を測定して得られた測定値であろう。その際、A が B より小さいので B を三等分して下位単位 B'を作り、それで A を測定したら B'二つ分の大きさだったとする。

ここで小学校第 1 学年で学習する任意単位による測定を思い出せば、「A は B'の二つ分」あるいは「A は B'の 2 倍」と表現できる。そして、B'は B を三等分した時の一つ分の大きさなので、これを「B'は B の$\frac{1}{3}$」と表現することにすると、「A は B の$\frac{1}{3}$の二つ分」あるいは「A は B の$\frac{1}{3}$の 2 倍」と表現できる。そして、「$\frac{1}{3}$の二つ分」を$\frac{2}{3}$と表すことにすると、結局、「A は B の$\frac{2}{3}$倍」と表されることになる。

このように、割合を表す数を具体的に求めようとすると測定の操作が必要となり、その操作の途中では基準となる量を分割したり、分割されたもののいくつ分かを考えたりすることになる。そして、その分割やいくつ分かを集める操作が、結果として測定値を与えることになる。つまり(iii) 割合分数は(i) 分割分数と基本的には同じことであり、測定結果に焦点を当てれば前者、測定過程に焦点を当てれば後者になるにすぎない。実際、上の(i)で AI が示した例「1 枚の紙を三等分した二つ分が$\frac{2}{3}$」も、1 枚の紙の大きさを B、三等分した二つ分の大きさを A とすれば、「A は B の$\frac{2}{3}$倍」となり、(iii)と変わらない。

$\frac{2}{3}$ m は m という「決まった単位（普遍単位）」を基準にして量の大きさを表しているが、この場合も、普遍単位の大きさを B、表したい大きさを A とすれば、結局は「A は B の$\frac{2}{3}$倍」ということを表している。つまり分数$\frac{2}{3}$自体は、普遍単位に対する表したい量の割合を表しているにすぎない。したがって(ii)も(iii)の一種と言えよう。

(v)のような数直線の上の位置がどのように決まるかと考えると、点の位置は、0 からの長さの端点として決まるであろう。その長さは、0-1 区間の長さに対する相対的な長さとなる。$\frac{2}{3}$であれば、0-1 区間を三等分し、その二つ分の長さの右端の位置を考えることになる。つまり、0-1 区間の$\frac{2}{3}$倍の長さによりその位置が決まる。数直線の上の点は、0-1 区間の長さを 1 とした時のそれぞれの割合に対応する大きさを示しているとも言えよう。数 r の意味を「量への r 倍の作用そのものとして理解する」という彌永昌吉先生の考え方も参照したり、数には相対的な大きさしかないことを想起すると、数の意味はもともと倍や割合であるとも考えられる。だとすれば、(v)は(iii)と変わらないことになる。

数の演算としての 2÷3 の商はそもそも数であるから、(v)に含まれそうにも思われる。仮に教科書でよく見られるように、2 L を三等分した一つ分として$\frac{2}{3}$ L と考えるなら、それは(ii)の意味であるから、上で見たように(iii)に含まれる。また 2 L が 3 L の何倍かと考えて 2÷3 をするのであれば、その商は倍や割合であるから、やはり(iii)に含まれる。

少なくとも現行の展開を想定するならば、第 5 学年で商を分数で表すことを学習するずっと前に分数$\frac{2}{3}$は学習している。そして$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$ だから$\frac{2}{3}$の 3 つ分で 2 になることもわかるので、2÷3 の商、つまり 3 倍して 2 になる数は$\frac{2}{3}$だとわかる、とすればよいだけなので、あえて「商分数」という意味を設定する必要はないように思われる。それまでにたし算やひき算に現れていた$\frac{2}{3}$と、何も違いはないのではないだろうか。

結局、「五つの意味」というのも、割合を表す分数の現れ方の違いや焦点の当て方の違いであるならば、あえて「異なる意味」であるかのように吹聴する必要もあるまい。もちろんそれらを私たち教師が区別し、それに基づく指導をすることで子どもたちの分数の理解が促進されるのであれば、教育的な配慮として区別することは適切かもしれない。しかし、子どもの分数についての理解が十分ではないとされ、しかもその原因が「分数には多様な意味があるから」という話なのであれば、そうした区別自体を疑ってみてもよいのではないだろうか。

例えば、上で見たように分数の意味が(iii)の割合を表すことに集約されるとすれば、分数の難しさは、自然数に比べて、数の割合的な側面がむき出しになるからではないかとの推測も立つ [1]。そうであれば、割合の指導などとも連携しなが

ら、割合の側面に留意した指導を行ったり、そうした割合としての数が自立した存在へと移行することに留意した指導の展開を構想したりすることが求められよう。

当然ではあるが、分数の難しさをどこに求めるかにより、私たちが分数の指導で重視すべきことも変わってくる。分数に多様な“意味”があるのか、ということを、一度きちんと検討してみてもいいのではないだろうか。もしも分数の“意味”が一つで済むならば、それに越したことはないはずである。

1) 2 m や 1.5 L の 2 や 1.5 も基準量に対する割合である。A は B の 3 倍や 2.4 倍という時の 3 や 2.4 も割合を表している。自然数や小数はもちろん 12÷3 や 2÷5 の商ともなりうる。また 4 枚の折り紙という時の 4 は基準の折り紙 4 つ分であり、ニンジン 1.5 本の 1.5 は基準のニンジン 1 本と、十等分したニンジン五つ分の大きさを表すであろう。しかし、こうした自然数や小数にそれぞれ名前を付けて区別することは、普通はしない。

そう思いながら改めて考えてみると、自然数や小数に比べて、分数の学習では、基準量の大きさがいろいろに変わる場合が多いように思われる。自然数や小数の学習では、基準量がいろいろ変わる場面はかけ算の学習として扱われるのに、分数は第 6 学年でかけ算を学習する以前でも、基準量が変わる場面が扱われる。上でも触れた 2 m の三等分といった場面や 12 個の 3 分の 1 といった場面である。こうした場面では、基準量が何かを意識し、基準量と表現したい量との関係に注意を向ける必要が出てくる。そのために、数の割合的な側面が「むき出し」になるのではないだろうか。

【算数・数学教育における IAQ に戻る】