正負の数の学習でのベクトルとスカラー

中学校第1学年で負の数が導入される際、0より小さい数を負の数と呼ぶことは説明がされるのだが、−3とか−5といったそれぞれの数がどのような数なのかは、明確にはされていないのではないだろうか。−3は0より3小さい数だと言えばよいようにも思われるが、「0より3小さい」がどのような意味なのかが明確でなければ、−3がどのような数かを説明したことにはならない。

0より負の方向(左方向)に3だけ行ったという意味だとすると、数直線上での位置の説明にはなるが、数としてはどのような数なのかはやはり明確ではない。「左方向に3進む」という移動のことを“数”とする立場なのだろうか。

あるいは「0より3小さい」とは0−3の結果のことだとすれば、そうした数はまだないので、0−3自体を−3の定義とし、−3とは0−3のことだとするという立場なのであろうか[1)]。

例えば、彌永昌吉先生の「数の体系」をちょっと参考にさせてもらい(正確な翻案ではないけれども)、それまで学習した正の数の加法の逆元を集めて負の数と呼ぶことにする(下巻p. 22)とする手もある。これでいくと、−3は3の逆元であるから、−3とは3とたして0になる数ということになる。そうした数を新たに考える、ということになる。

この決め方の利点は、加法の逆元という代数的な特徴によりそれぞれの負の数を決めているので、加法が考えやすいことである。−3＋7であれば、7を3と4に分解して、−3＋7＝−3＋(3＋4)＝(−3＋3)＋4＝0＋4＝4と考えることができる。結合法則を仮定してしまっているが、そこは許してもらう。−3＋(−2)であれば、天下り的だが、−3＋(−2)＋5を考える。これは0になるので、−3＋(−2)は5の逆元だとわかる。そこから、−3＋(−2)＝−5と考えることができる。

−3−(−6)は教科書と同じようにして、□＋(−6)＝−3となる□を求めればよいが、両辺に6をたして□＝−3＋6＝3と考えることができる。

(−3)×2を累加により−6と決め、分配法則を許してもらえば、(−3)×(−2)については、0＝(−3)×(2＋(−2))＝(−3)×2＋(−3)×(−2)より[2)]、(−3)×(−2)が−6の逆元になることがわかるので、6になると考えることができる。

結局、四則演算は代数的な話題であるから、−3は「3の加法の逆元」と代数的に規定しておくと、やはり代数的な規則である結合法則や分配法則を用いなが

ら、四則演算をその規定の仕方に沿って考えていくことができる。

一方、中学校の教科書では数直線を用いた説明が多く見られる。その際、数は矢印で表現される。矢印を向きのある量の表現としてのベクトルのように考えると、量を用いて数の学習をするという算数のスタイルに近いようにも思われる。せっかく矢印で表現されており、ベクトルのような矢印の操作もするので、数直線上の全ての矢印を集めて、実数体上のベクトル空間と見ることもできよう。

ただ話がややこしいのは、“実数体上”のとは言ったものの、その“実数”ではまだ負の数が確立されておらず、むしろベクトルの操作と整合するように負の数の部分を**決めていこう**という状況だということである。長さや液量のように学習者にとって馴染んでいる量の話であれば、それを基に数の方の演算を決めていくことは、一つの学習の進め方としてありだとは思う。しかし、学習者にとってあまり馴染みのないベクトル的な操作をベースに、数の演算を学習することは、得策ではないようにも思われる。

さらに加法と減法がベクトルの操作に忠実に説明されているのに対し、乗法の学習になると、そうした方向性が曖昧になっている。ベクトル空間として考えると、今の場合、乗法としては内積や外積よりもスカラー倍を考える方がイメージはしやすいであろう。しかし、乗法の学習ではベクトルのスカラー倍のようなイメージは明確にはなされていない。

正負の数の学習において、ベクトル的な発想が所々に顔を出すものの、ベクトル空間には見せたくないと思うのか、結果として、ベクトルの操作が前提にされていることや、スカラー倍を考えることが曖昧となり、全体としても一貫性の弱い構成になっているのではないだろうか。

1) 0－3 自体ではなく、2－5 や 17－20 などを考え、その同値類を－3 とする負の数の構成方法はしばしば見られる。

2) (－3)×0＝0 が気になるとすれば、例えば、(－3)×0＝(－3)×(0＋0)＝(－3)×0＋(－3)×0 より (－3)×0＝0 としたらどうであろう。

【算数・数学教育における IAQ に戻る】