

数の拡張という観点

よく言われるように、小学校や中学校、高等学校で学習する数は、四則演算について閉じるように、あるいは基本的な方程式が解を持つように数の範囲を拡張していると捉えることができる。自然数と0からなる数について、減法で閉じるようにする、あるいは $x+5=3$ といった方程式が解を持つようにすると、負の数が必要になる。除法で閉じるようにする、あるいは $7x=2$ といった方程式が解を持つようにすると、分数(有理数)が必要になる。 $x^2=5$ や $x^2=-3$ といった方程式が解を持つようにすると無理数や虚数が必要になるといったぐあいである。

こうして数を拡張する場合、その数は新たに“開発”されるものなので、その初期においては、まだどのような性質を持つかは決まっていまいであろう。新たに作ったアンドロイドに、いろいろな動きや反応の仕方を設定して、徐々に人間っぽくするように、新たに作った“数”の候補について、いろいろな設定をして徐々に「数っぽくする」という作業が必要になる。2つの数の大小をどう決めるのか、2つの数に対して四則演算をどう決めるのかといったことである。

教科書を見ても、分数や負の数、無理数を学習した場合、大小関係がどうなるか、四則演算はどうなるかを学習していくので、その点では、上で見た数の拡張の流れが踏襲されているように見える。

ただ、その際に、算数や中学校の数学では量に基づく学習がなされ、日常的な量の経験を参照しながら学習するので、“拡張”の観点が曖昧になってしまい、そのために、算数や中学校数学の学習の点からも曖昧さが残されてしまっているようにも見受けられる。

例えば中学校第3学年で無理数を学習した際に、無理数の四則演算についても学習する。例えば、 $\sqrt{5} \times \sqrt{2}$ は縦が $\sqrt{5}$ 、横が $\sqrt{2}$ の長方形の面積を求める計算として考え始められる。そして $\sqrt{5}$ の近似値と $\sqrt{2}$ の近似値をかけた値が $\sqrt{10}$ の近似値と近いことや、 $(\sqrt{5} \times \sqrt{2})^2$ が10になることを確認して、 $\sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{5 \times 2}$ であるとまとめられる。しかし、 $\sqrt{2}$ のような無理数を“かける”というのは、どのようなことなのかは説明されていないように見える。まさか、1辺が $\sqrt{2}$ の長方形の面積を求める演算として、 $\times \sqrt{2}$ を規定するということでもあるまい。では、 $\times \sqrt{2}$ とは何をすることなのか？

乗法がどのような操作かも説明されていないのに、その値を求める際には乗

法の結合法則や交換法則が当然のように用いられている。ただ改めて考えると、これは、無理数をかける乗法でも結合法則や交換法則は成り立つと想定してかけ算を構成しようとしているのか、それとも何かの根拠に基づいて成り立つことが保証されているのか、どちらなのか曖昧である。

こうした点が曖昧になるのは、面積を求める計算として乗法を考え始めたからではないだろうか。それにより、算数で学習した自然数や小数をかける乗法の知識が、意図的か意図的でないかはわからないが、何となく持ち込まれてしまっている。

$\sqrt{2}$ に収束する有理数列 $\{a_n\}$ を考えて、 $\times a_1, \times a_2, \dots$ の収束先を考えるといった説明は中学生にできないとしたら、もしも「 $\sqrt{2}$ をかけるってどんなことなんだろう？意味わからないな」と思っている中学生に、私たちはどう説明することができるだろうか。

同様のことは負の数でも見られる。 $5 \times (-2)$ を初めて考えるような場合に、この積がいくつかということは、2時間前のいた位置や乗数を1ずつ減らしたときの積の変わり方のきまりなどに基づいて確認がされる。しかし肝心の負の数をかけるとはどのようなことなのかは、やはり説明されていないように見える。こちらまさか、負の数の乗法とは何時間か前にいた位置を求める計算と説明するつもりではないであろうが、だとすれば、負の数かけるとはどのようなことなのか？

同じような視点で考えてみると、実は、小数や分数をかけることについても、同様の傾向があるのかもしれない。確かに小数や分数の場合は、 $\times 2.6$ は2.6倍を

求めることであり、 $\times \frac{2}{5}$ は $\frac{2}{5}$ 倍を求めることだとの説明がある。ただその小数倍や分数倍が何かに関わり、「～にあたる」というのが何を意味するのかが明確にされていないと、結局は、小数倍や分数倍の意味も明確ではなく、結果として小数や分数をかけるとはどのようなことかも明確にはならなくなってしまう。この場合

も2.6 m分の値段を求める演算とか、 $\frac{2}{5}$ Lのペンキで塗れる量を求める演算として乗法を説明するのではないとすると、では小数や分数をかける乗法とはどのようなことかを別途説明する必要があるだろう。

量を持ち出して説明することで、なんとなくかけ算がすでに決まってしまう

ているような錯角に、私たちが陥っているのかもしれない。そのために、乗法を新たな数でも使えるように構成していくという数の拡張の観点が希薄となり、新たな数の場合には乗法をどのように決めたらよいか、という発想になりにくくなっているような気がする。そうすると「この数の場合の乗法とはどのようなことか」は話題になりにくく、「今の量の場面は当然、乗法で求めるのだけど、その答えはいくつになるか」だけが話題になるのかもしれない。しかし数の拡張という観点でいけば、乗法は数の世界の演算であり、量を参照せずとも数の言葉だけで説明できるはずである。説明のために量を参照するのはよいが、それだけでは乗法とは何かの説明にはなっていないはずである。

もちろん、小学生や中学生に対して数の構成をきっちりと扱うことは、現実的ではないであろう。ただ数の演算についても **意味を大切にして指導** するとすれば、小数や分数をかけるとはどのようなことか、負の数や無理数をかけるとはどのようなことかが、子どもたちに感じられるような説明の仕方が必要であろうし、答えがいくつになるかを考えることとは、それとは別ものとして考える必要がある。そのために、私たち教師が **乗法とは何かといったこと** を意識し、新たに現れた数について演算を考えようとしているという、数の拡張の観点を忘れないようにする必要もあろう。

無理数や負の数、分数などは、そもそもそれ自体が **数なのか曖昧な部分も**、少なくとも初学者にはあるかもしれない。数の拡張という観点があると、新たな数の導入時にこれも数だと“言い切って”、あとはその計算の仕方を説明するというのではなく、演算をうまく決めることで新たに導入した数らしきものを「数っぽくする」という作業として演算の導入も位置づけられよう。

演算は当然あるとして量を用いてそれを“説明”するという立場なのか、それとも新たに導入した数についても演算ができるように“数を育てていく”という立場なのかを、一度はきちんと検討し、それに沿った指導のあり方を意識的に組み立てる必要があるのではないか。少なくとも現行のような曖昧な説明だけして、小学生が小数や分数の乗除が苦手だとか、中学生が負の数や無理数の乗除が苦手だと嘆いているならば、他にまず検討することがあるように思われる。

【算数・数学教育における **IAQ** に戻る】