

二重数直線に潜む前提

小学校の算数で、かけ算やわり算に関わる内容を学習する際には、2本の数直線を上下に重ねた、いわゆる二重数直線 (double number lines) が用いられることが多い。二重数直線を用いて場面に現れる数量を表現すると、数量間の対応関係が明確になり、またそれをかく過程で基準である「1」を意識することにもつながる。さらに、教科書のように正確にかけば、他の数量との位置関係から、求める数量がどの程度の大きさかの見当をつけたり、求めた数量の妥当性を確認したりすることにも役立つ。

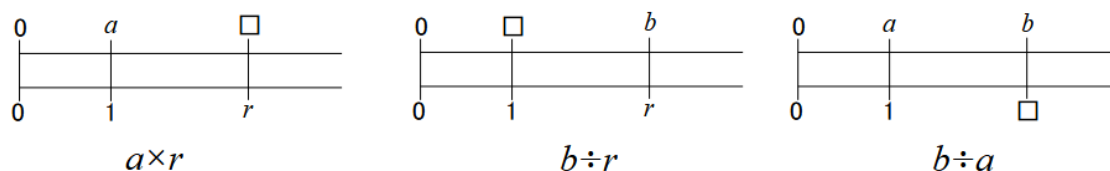
平成29年度の全国学力・学習状況調査算数では、1 m あたり 60 円のリボンを 0.4 m 買うという場面について、0.4 m の代金を□円として、60、0.4、□を示された数直線の適切な位置に配するという問題が出された。この時の正答率は 70.0 %であった。特に 60 の位置を正答できた児童は 81 %以上、0.4 と□のペアを正しく位置づけられた児童は 76 %以上いたようである。また翌平成 30 年度には 0.4 m の重さが 60 g の針金 1 m の重さを求めるという場面について、同様の問題が出された。この時の正答率は 66.9 %であったが、□の位置を正答できたのは 77 %以上、0.4 と 60 のペアを正しく位置づけられたのは 71 %以上であった。

こうした結果を見ると、かけ算やわり算に関わる場面を二重数直線上で表現することは、子どもたちから概ね理解してもらえているようにも見える。ただ平成 30 年度はこの後で、1 m の重さを求める式を 4 つの選択肢から選ぶという問題も出しており、正答率は 65.5 %なのであるが、数直線と式の選択の両方で正答した児童は 49.1 %に留まっている。逆に、数直線で正答しながら式の選択ができなかった児童が 18 %ほど、数直線は正答できなかったが式の選択はできた児童が 16 %以上いたとされている。数直線で正答し、式も選択できた児童であっても、実際に数直線を参照して式を選択したかが不明であることも考慮すると、数直線が示された状態で、それを完成させることが立式を可能にしたケースは、半数もないと考えることができよう。

改めて考えてみると、二重数直線を用いて演算決定をすることは、そう当然のことではないことに気づく。

例えば、数直線上での数値と□の位置関係で演算を決めると指導する場合も

あるようである。下図のそれぞれの□の位置の場合ごとに、□の値を求める演算がそれぞれどうなるかを覚えておいて、演算決定につなげるものである。



ただこれを覚えるのは容易ではなく、これを覚えるくらいなら、「くもわ」や「みはじ」を覚える方が楽でもあり、また効率的でもあるように思われる。

二重数直線では上の数直線が表す量と下の数直線が表す量とが比例の関係にあることが大前提としてあるので、それを利用して立式につなげることが、教科書などでもよく行われている。つまり、一方の量が○倍になっているのもう一方の量も○倍になるはずだ、とする考え方である。

上の左の図であれば下の量が1から r に r 倍になっているので、上の量も a から r 倍すると□になる、だから□を求めるには $a \times r$ をすればよい、として演算決定を行う。真ん中の図では1から r に r 倍になっているので□を r 倍すると b になるとして $\square \times r = b$ とするか、 r から1になるには $\div r$ なので b も $\div r$ をすると□が求まるとして $\square = b \div r$ とするかであろう。右の図であれば、□倍を考えると、真ん中と同様に考えることができる。

これらの演算決定は比例的推論により自然に行えるようにも思えるが、実際には、少なくとも次のような考え方が暗黙のうちに用いられている。

- ・ 上の線の量と下の線の量は比例の関係にあり、一方の量が r 倍になればもう一方の量も r 倍になる。(比例的推論)
- ・ 上の線の量と下の線の量は比例の関係にあり、一方の量を r で割って得られる量には、もう一方の量を r で割って得られる量が対応する。(比例的推論の派生形)
- ・ 同じ線の2量の関係は乗法的関係(倍関係)で捉えるべきであり、加法的関係で捉えてはいけない。(比例的推論を用いることの要請)
- ・ r は1の r 倍である。

- ・ 1 の r 倍あるいは a の r 倍の量は $\times r$ により求められる。(倍とかけ算の関係)
- ・ 1 は r の $\frac{1}{r}$ 倍であり $\frac{1}{r}$ 倍は $\times \frac{1}{r}$ により求められる、あるいは 1 は r を r で割って求められる。(逆数的な発想)
- ・ $\square \times r = b$ あるいは $a \times \square = b$ であれば、 $\square$ はそれぞれ $\square = b \div r$ 、 $\square = b \div a$ で求められる。(乗法と除法の関係)
- ・ 矢印を用いる場合は、矢印の使い方に関わる規約。

さらに、倍や割合の学習で用いられる場合は、下の数直線が倍あるいは割合であるので、2つの倍や割合についても量と同様に倍関係により捉えることが必要となる。すなわち、

- ・ r 倍は 1 倍の r 倍であり、1 倍は r 倍の $\frac{1}{r}$ 倍である。
- ・ 割合 r は割合 1 の r 倍であり、割合 1 は割合 r の $\frac{1}{r}$ 倍である。

つまり、「倍の倍」「割合の倍」を考える必要が出てくる。その前提としては、倍や割合の値が話題としている量と比例の関係にあるという理解がある。ただ、倍や割合の学習において、そうした比例のことが明示的に説明されることはないように思われる。

上の用いられている考え方において、「 $\times r$ により求められる」とか「 r で割って得られる量に対応する」の部分に見られるように、かけ算やわり算を用いるべきであることは数直線から“示唆される”のではなく、むしろ数直線を用いる上で“前提とされている”のである。これは上下の線で表された 2 量が比例の関係にあることからわかると言えばそうだが、結局、二重数直線で示唆されるのは「どれとどれをかけるか」「どれをどれで割るか」という点であり、かけ算とわり算のいずれかを用いることもまた最初から前提されていると言える。

いずれにしる、二重数直線を用いることで「かけるのか割るのか」の判断や、「どれとどれをかけるのか」「どれをどれで割るのか」の判断についてサポートしてもらえる部分も確かにあるが、そのためには上で見たような様々な考え方が比較的自由に使えることが前提となる。二重数直線に対する“操作”のために

は、そうした考え方が必要である。二重数直線には二重数直線の“文法”があり、その文法に沿って二重数直線上で考えることになる。したがって、二重数直線は子どもたちにとって必ずしも自然な表象ではないし、その操作も自然にできるわけではないであろう。

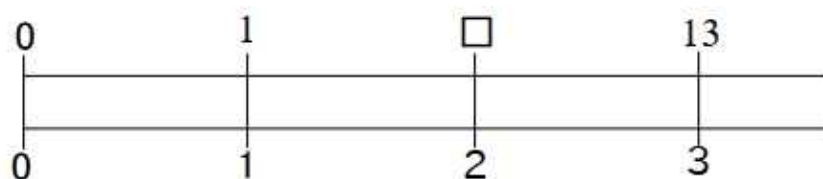
その利用には上で見た考え方を適用する練習や慣れも必要かもしれない。しかしそうまでして習熟しても、中学校の数学では使う機会はほとんどないのではないだろうか。だとすると、本当にそれほど習熟する必要があるのだろうか。結局は比例の関係にある2量を表すということならば、式で表してもそれほど変わらないのではないだろうか。

【補足1】

上のような“操作”をする必要があるとすれば、その“操作”を練習する機会も保証される必要があるのかもしれない。その機会においては、二重数直線を用いて新たなことを学習したり、難しい問題にアプローチすることよりも、二重数直線を操作することやその効果を経験すること自体を目的とする方がよいのかもしれない。

【補足2】

上下の線の表す量がどのような関係にあるのかが示されていないと、二重数直線の中の□を求めることは難しい。例えば下の図の□に何を入れたらよいのかは判断しにくいのではないだろうか。



つまり、2量の関係として本来は多様なものが想定されるので、上のように二重数直線を用いている時には、実際には見えている以上の仮定を暗黙のうちに持ち込み、それにしたがって考えていることになる。

（□には4が入ります。そのような関係を背景として作っています。ただ、それを聞い
ても、何かでまかされたような気になるのではないしょうか。）