文字を使わない文字式学習への橋渡し

上越教育大学
布川　和彦

中学校になると文字の入った式 －文字式－ が急にふえて、わかりにくいと感じたり、どうあつかっていいのかわからなくなったりします。

しかし、文字は値がよく定まらないときに数字の代わりに使うモノですから、基本的には数と同じように理解したり、あつかったりすればよいはずです。ただし、あつかっているときに、式との向き合い方が少し違っています。小学校では式がでてきたら、少しずつ計算を進めて、最後には１つの数にまとめていくといったゴールを目指すことが多かったかもしれません。一方、中学校の文字式では、文字で表された数値を中心に、その式全体がどのような構造や仕組みを持っているかを探ることに重点が置かれます。そうした構造や仕組みについて、式がどのようなメッセージを伝えようとしているかを聞き取ろうとすること、もしもそのままで聞き取りづらい場合には式の形を少し変えて聞き取りやすくしようとすることが、大切になってきます。

こうした式に対する向き合い方は、文字式でなくても、実は算数でよく出会ってきた数の式でも練習することができます。ここでは文字は使わずに、数の式についてそうした向き合い方をすることで、文字式を学習する準備運動をすることにしましょう。

式との向き合い方

7に3をかけてから5をかけた積と、7に5をかけてから3をかけた積とでは、どちらの方が大きくなるでしょうか。

この問いに対して、$(7\times3)\times5=21\times5=105$と計算し、また$(7\times5)\times3=35\times3=105$と計算して、2つの積は同じになると答えることもできます。しかし小学校4年生のときにまとめた計算のきまりを用いて、次のように考えることもできます。

$$\begin{aligned}(7\times3)\times5&=7\times(3\times5) && \text{【結合のきまり】}\\ &=7\times(5\times3) && \text{【交かんのきまり】}\\ &=(7\times5)\times3 && \text{【結合のきまり】}\end{aligned}$$

計算をして1つの数値を求めるのではなく、式の構造に目を向け、計算のきまりを用いて式の構造を少し組みかえたりしながら、その特徴を探るのです。今の場合、このような探究により、実は2つの式は基本的に同じものであることがわかります。

それでは、7に3をかけた積と7に5をかけた積をたし合わせた和と、3と5の和を先に求めて、7にその和をかけた積とでは、どちらの方が大きくなるでしょうか。

これもそれぞれを$7\times3+7\times5=21+35=56$、$7\times(3+5)=7\times8=56$と計算して結果を求め、それらの結果を比べて同じになると答えることもできます。しかし、やはり4年生で学習した分配のきまりを用いると、次のように、式の構造を少し組みかえるだけで判断することもできます。

$$7\times3+7\times5=7\times(3+5) \qquad \text{【分配のきまり】}$$

このように、式を計算した結果に着目するよりも、式の構造の方に目を向けるのが、文字式につながる式との向き合い方です。その探究の際の重要な道具は、計算のきまりになります。“計算”のきまりではあるのですが、式の形を変えてかくされた構造を見やすくするための道具[1]と考えるとよいでしょう。

1）実際、中学校に入ると「計算」の文字がとれて、交換法則、結合法則、分配法則と呼ばれるようになりました。

逆の発想

式の構造を探るという場合、計算のときとは逆の発想が求められる場合があります。計算では式の中の計算を少しずつ実行して、基本的には2つの数を1つの数に直していきます。3＋5なら8へ、7×5なら35へというぐあいです。

しかし式の構造を探る場合、そのかくされた構造を見やすくするために、あえて逆のことをする場合があります。

たとえば54が9で割りきれるかを考える場合、54÷9＝6と計算をしていけば割りきれることがわかります。しかし今の式の向き合い方の場合には、この54が9×6の積であるという構造をうきぼりにすることで、54が9の倍数であること、したがって9で割りきれるという説明の仕方をします。つまり、54の中の、9×6や9の倍数というかくされた構造を探り出すのです。

9に7をかけた積にさらに9をたした和は9で割りきれるかを考える場合、9×7＋9＝63＋9＝72、72÷9＝8と計算をして、割りきれることを確認することももちろんできます。しかし今の式の向き合い方をした場合は、9×7＋9の式の中に9の倍数の構造がかくされていないかを探ることになります。そのために、9をあえて9×1と見ることにします。これにより、次のように分配のきまりが使えるようになるからです。

9×7＋9＝9×7＋9×1　　【9を9×1と見る】
　　　　＝9×(7＋1)　　【分配のきまり】

このように式の形を変えることで、9に何かをかけた数という9の倍数の構造が見やすくなりました。そして、9の倍数なので9で割りきれることもわかります。

ここで分配のきまりが使えたのは、9を9×1と見たこと、つまり9＝9×1と考えたことによります。算数の学習では9×1＝9と計算することはあっても、9＝9×1と1つの数をかけ算の形で表すことはなかったかもしれません。しかしここで考えている式との向き合い方では、式にかくされた構造をうきぼりにするために、あえて計算前の形になおしたりもするのです。

式の構造に基づく説明

式の構造をうきぼりにすることで、式のもつ性質を説明することを考えてみましょう。

例えば852は3で割りきれるかを考えてみます。もちろんこれも、852÷3を計算して確かめることもできます。しかしこの式852 (数も式の一種です) の構造をうきぼりにすることで、3で割りきれるかの説明を考えてみます。

まず位取りの考え方を思い出すと852は次のような構造を持っています。

$$852 = 100\times8 + 10\times5 + 2$$

ここで、10を3で割りきれる部分とあまりに分けた$10=3\times3+1$という構造に注意すると、10×5の部分は次のように考えることができます。

$$\begin{aligned} 10\times5 &= (3\times3+1)\times5 && 【10を分解】 \\ &= 3\times3\times5 + 1\times5 && 【分配のきまり】 \end{aligned}$$

これにより、10×5も3で割りきれる部分$3\times3\times5$とあまり5に分かれました。

100×8の部分も同じように考えると次のようになります。

$$\begin{aligned} 100\times8 &= (33\times3+1)\times8 \\ &= 33\times3\times8 + 1\times8 \end{aligned}$$

これらの結果をあわせると、852には次のような構造がかくされていたことがわかります。

$$852 = (33\times3\times8+8) + (3\times3\times5+5) + 2$$

ここで、$33\times3\times8$と$3\times3\times5$の部分に目を向けると、まずかけ算の交かんのきまりにより、

$$33\times3\times8 = 33\times8\times3 = (33\times8)\times3$$
$$3\times3\times5 = 3\times5\times3 = (3\times5)\times3$$

ですから、それぞれ(33×8)と(3×5)に3をかけたという構造になっていることがわかります。ここから分配のきまりを用いて、次のように式の形を変えることができます。

$$\begin{aligned} 33\times3\times8 + 3\times3\times5 &= (33\times8)\times3 + (3\times5)\times3 \\ &= (33\times8 + 3\times5)\times3 && 【分配のきまり】 \end{aligned}$$

このことから、852 にかくされていた構造は、次のように見ることができます。

$$852 = 100\times8 + 10\times5 + 2$$
$$= (33\times8 + 3\times5)\times3 + (8 + 5 + 2)$$

$(33\times8+3\times5)\times3$ の部分は( )の中の数に 3 をかけた形になっています。そこで、$8+5+2$ の部分も( )×3 の形にすることができれば、852 全体が( )×3 という形の構造を持つことになり、3 で割りきれることがわかります。

8＋5＋2 の部分も( )×3 の形の構造を持つのかを調べてみます。これは 1 桁の簡単なたし算なので、計算をしてみると、答えは 15 となります。15 は 5×3 ですから、確かに×3 の部分をしています。つまり、

$$852 = 100\times8 + 10\times5 + 2$$
$$= (33\times8 + 3\times5)\times3 + 5\times3$$
$$= (33\times8 + 3\times5 + 5)\times3$$

という構造がかくされているので、852 は 3 で割りきれることがわかります。

ちなみに 853 の場合は、

$$853 = 100\times8 + 10\times5 + 3$$
$$= (33\times8 + 3\times5)\times3 + (8 + 5 + 3)$$
$$= (33\times8 + 3\times5)\times3 + 16$$

となりますが、16 は( )×3 の形には表せないので、853 全体も( )×3 という形の構造を持つことはできず、3 では割りきれないことがわかります。

ただし、$853 = (33\times8+3\times5)\times3+16 = (33\times8+3\times5+5)\times3+1$ であることに注意すると、853 を 3 で割ると、あまりが 1 であることはわかります。

852÷3 を計算すればすぐにわかることを、式の構造に目を向けて、ながながと説明してきました。何かムダのように思えますが、実はこのような説明にはメリットもあります。

上の説明で 33×3＋1 や 3×3＋1 の部分は、3 けたの数であれば、どのような数でも同じ構造を持つはずです。そうなると、上の説明に出てきた式の形を変える操作は、どの数でも同じようにできることになります。その結果として、3 けたの

どの数にも、

(　　　)×3＋(各位の数の和)

という構造がかくされていることがわかります。ここから、3 けたの数が 3 で割りきれるかどうかは、各位の数の和が(　)×3 の形の構造を持つかどうかで決まると考えることができます。

さらに、1000＝333×3＋1 や 100000000＝33333333×3＋1 といった構造があることに注意すると、実は 3 けたでなくても、何けたの数についても、上と同じような構造がかくされていると考えることができます。したがって、上と同じような説明ができることになります。

つまり、個々の数を計算してみなくても、各位の数の和が(　)×3 の形の構造を持つかを調べると 3 で割りきれるかどうかがわかるのは、**どのような数についても**言えそうだということになります。

実は文字式を用いた説明でやっているのは、こうしたことです。文字式の形を変えることで式に**かくされた構造をうきぼり**にし、そこからどのような数についても成り立ちそうな性質を説明しようとしていることが多いのです。ですから、すこしゴチャゴチャしていても、上のように式と向き合い、式にかくされた構造を探りながら説明をすることは、多くの場合に共通する仕組みを探し当てることにつながります。

〜*〜*〜*〜*〜*〜*〜*〜*〜*〜*〜*〜*〜*〜*〜*

もう一つ、式の構造に基づいて説明することをやってみます。

25 の十の位と一の位を入れかえた 52 を考えます。そして大きい方の 52 から小さい方の 25 を引きます：52－25。この差は 9 で割りきれるでしょうか。

このときも 52－25＝27 と差を求め、27÷9 を計算すれば差が 9 で割りきれることはわかります。ここで計算するのをちょっとがまんして、式の構造に着目するような式との向き合い方で、9 で割りきれるかをあえて考えてみます。

まず 52 と 25 の構造をうきぼりにすると、次のようになります。

$$52 = 10 \times 5 + 2$$
$$25 = 10 \times 2 + 5$$

この形を利用して、次に52－25の差を求めてみます。

$$\begin{aligned} 52 - 25 &= (10 \times 5 + 2) - (10 \times 2 + 5) \\ &= 10 \times 5 + 2 - 10 \times 2 - 5 \\ &= 10 \times 5 - 10 \times 2 + 2 - 5 \\ &= 10 \times (5 - 2) - (5 - 2) \qquad \text{【分配のきまり】} \end{aligned}$$

－(10×2＋5)の部分が－10×2－5となるのがピンとこない人は、10×2と5をあわせたものを引くということは、10×2と5をそれぞれ引くことと同じだと考えてみてください。

また＋2－5の部分が－(5－2)となる部分がしっくりこない人は、2をたしておいてから5を引くことは、あらかじめ5から2を取り除いておいてから引くのと同じことだと考えてみてください。最終的にはどちらも3を引くことになっています。

いずれにしろ、

$$52 - 25 = 10 \times (5 - 2) - (5 - 2)$$

となり、52－25という式には10×(5－2)－(5－2)という構造がかくされていることがわかりました。

ここで(5－2)も1つの数であることに注意し、また前に9を9×1と見たのと同じように、(5－2)を1×(5－2)と見ることにすると、分配のきまりがもう一度使えます。

$$\begin{aligned} 52 - 25 &= 10 \times (5 - 2) - (5 - 2) \\ &= 10 \times (5 - 2) - 1 \times (5 - 2) \\ &= (10 - 1) \times (5 - 2) \\ &= 9 \times (5 - 2) \end{aligned}$$

つまり52－25という差には、9×(5－2)という構造がかくされていたことになります。これは9に数5－2をかけるという形をしていますから、9の倍数になっています。ですから、9×(5－2)は9で割りきれますし、もとの52－25も9で割り

きれることがわかります。

ここで9がどこから出てきたかを考えると上の式の10−1からです。そしてこの10と1は十の位の10と一の位の1ですから、2けたの数であればいつでも同じことが言えるはずです。したがって、上の説明の基本的な部分や式にかくされた構造の9に関する部分は、どのような2けたの数でも同じように成り立つと期待できます。

ここから、2けたの数であればどのような数でも、もとの数と十の位と一の位を入れかえた数のうち、大きい方から小さい方を引いたときの差は9で割りきれると考えることができます。

実際、上の説明の2と5の部分をaやbといった文字に置きかえてみると、中学校で学習する文字式による説明になります。

文字が入るとわかりにくいという場合は、一度、数字のままで考えてみると感じがつかめるかもしれません。ただし数字を使うときも、すべてをどんどん計算してしまうのではなく、計算するのをちょっとがまんし、式の構造を観察することを心がけるような向き合い方をするとよいでしょう。

式の向き合い方の算数への応用

ここまで見てきた式との向き合い方は、中学校での文字式の学習への橋渡しでした。しかし算数の学習の中でも、すぐに計算せずに計算をできるだけ後まわしにして、式の構造をながめてみると、ちょっと得ができたり、式が理解しやすくなったりすることがあります。

小学校5年生で学習する割合の問題を考えてみましょう。

ある店でふだん1200円で売っている商品が、今日は20％オフで売られていたとします。20％値引きされた金額を求めるとき、もちろん、まず20％オフで安くなる金額を 1200×0.2＝240 と求め、これをもとの値段から引いて 1200－240＝960 と求めることももちろんできます。

しかし計算するのをちょっとがまんして、次のように求めることもできます。

$$\begin{aligned}1200-1200\times0.2 &= 1200\times1-1200\times0.2\\ &= 1200\times(1-0.2) \qquad \text{【分配のきまり】}\end{aligned}$$

20％オフということはもとの値段の 80％になるから 1200×0.8 をすると習った人もあるかもしれません。しかし、式の構造に目を向けると、問題場面のようすをそのまま式に表して、少し式の形を変えてやることで、自動的にそうした結論を得ることができます。

ここで 0.2 は 20％から 20÷100 で求めたことを思い出し、さらに5年生で学習したように、20÷100 の商は$\dfrac{20}{100}$と書けることを思い出すと、1200×(1－0.2)の式は次のように表すこともできます。

$$1200-1200\times0.2=1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)$$

この形をうきぼりにしておくと、10％オフや30％オフ、25％オフのときの代金も、20のところを10や30、25に変えるだけですぐに表すことができます。

この20％値引きされた金額に、10％の消費税[2)]が加わった金額が代金だとします。その代金も、960円の10％分の金額を求め、それを960円にたせば求めることはできます。しかし、せっかく10％オフや30％オフの金額でもすぐにわかる

2）2025年4月時点で消費税の標準税率は10％でした。

式がありますから、この式のままで税込の代金も考えてみます。

20 %オフの後の金額は

$$1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)$$

と表すことができました。この 10 %が消費税になります。20 %オフの 20 %と同じように、10 %も分数で表すと$\frac{10}{100}$となります。これを上の金額の式にかけると消費税分を表すことができます。

$$1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)\times\frac{10}{100}$$

そしてこれを 20 %オフの金額にたすと、税込の代金になります。

$$1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)+1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)\times\frac{10}{100}$$

この中の$1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)$も 1 つの数です。そしてこれを$1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)\times1$と見ることにすると、ここでも分配のきまりを使うことができて、次のように式の形を変えることができます。

$$\begin{aligned}&1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)+1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)\times\frac{10}{100}\\&=1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)\times1+1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)\times\frac{10}{100}\\&=1200\times\left(1-\frac{20}{100}\right)\times\left(1+\frac{10}{100}\right)\end{aligned}$$

代金をこのように式のままの形で表すと、20 %オフしてから 10 %の消費税を加えた代金が、どのような構造でできているかがよくわかります。もとの売値の 1200 に 20 %オフを表す$1-\frac{20}{100}$と、10 %の消費税の可算を表す$1+\frac{10}{100}$をかけたものが、このときの代金なのです。

また消費税が 10 %以外になっても、その数値を上の式の 10 の部分に入れれば、そのときの代金をすぐに求めることができます。

代金をこのような式の形で表しておくと、さらに次のようなこともすぐにわかります。

上では売値をまず 20 %オフしてから、その後で 10 %の消費税を加えました。それでは売値に先に消費税の 10 %を加えて、それから 20 %オフにしてもらったら、もっと安くなるでしょうか。それともかえって高くなるでしょうか。

上と同じように考えていくと、売値 1200 円に 10 %の消費税分の加えた金額は、

$$1200\times\left(1+\frac{10}{100}\right)$$

となります。そしてここから 20 %オフした代金は、これに$1-\dfrac{20}{100}$をかければよいので、次のようになるでしょう。

$$1200\times\left(1+\frac{10}{100}\right)\times\left(1-\frac{20}{100}\right)$$

これを先ほどの 20 %オフしてから 10 %の消費背を加えた代金と比べてみると、1200 に$1-\dfrac{20}{100}$を先にかけるか、$1+\dfrac{10}{100}$を先にかけるかの違いしかないことがわかります。そしてかけ算では、かける順序によって積は変わらないので、結局、２つの代金は等しくなることがわかります。つまり、20 %オフしてから消費税をつけても、消費税をつけてから 20 %オフしても代金は変わらないのです。

両方の場合の代金をそれぞれ計算しても、両者が等しくなることはわかります。しかし、上のように式と向き合い、計算をするのをちょっとがまんして、その構造をさぐっていくと、なぜ両者が等しくなるのかが見えてきます。また 20 %オフの「20」や 10 %の「10」が式の中に残っていますから、この部分を他の数に変えても式の全体の構造が変わらないようであれば、同じ結果が得られること、つまり他の％のときでも同じ結果が成り立つことも見えてきます。

このように式と向き合うと、計算する場合よりも少しゴチャゴチャして見えるかもしれませんが、考えている数値にかくされた構造が見え、そこから他の場合のようすも知ることができます。

まとめ

数や数の式でも、計算するのをちょっとがまんして、式の構造を探るつもりで式と向き合うと、**他の場合**でも同じことが成り立つことや**なぜ**そのようなことが成り立つのかの仕組みが見える場合のあることを、ここまで見てきました。こうした式との向き合い方が、文字式を学習するための準備となります。また、文字式自体がそもそも、そうした数の仕組みや関係を表現ための手段だとも考えられます。

実は算数で学習してきたいろいろな筆算も背景には計算のきまりがあります。位取りの考え方と計算のきまりを組み合わせて、計算をしやすくしたのが筆算だと言えましょう。ですから、式の構造に目を向けるような式との向き合い方をすると、筆算の仕組みも理解しやすくなります。例えば、

$$5.7\times2.3=(57\times0.1)\times(23\times0.1)$$

$$=(57\times23)\times(0.1\times0.1)$$ 【交かんのきまり・結合のきまり】

と考えると、5.7×2.3 の筆算をするときに、まずは小数点を考えずに 57×23 を計算し、その積について小数点を 2 つずらせばよいことがわかります。×0.1 をする、つまり 0.1 倍にすると小数点が 1 つずれますから、×(0.1×0.1)なら小数点は 2 つずれるのです。

文字の入った式にまだなじめないときには、数の式のままで、まずは式との向き合い方を練習してみましょう。その中で、自然に文字式への抵抗感もうすれていくのではないでしょうか。