かなりわりきった

分数学び直しテキスト

上越教育大学
布川　和彦

分数も 4 や 23 や 9.7 などと同じ数なのですが、見なれた数とはちがい数字がたてにならんでいたり、見た目がちがうのに同じになることがあったりして、わかりにくいところがたしかにあります。

しかし分数を数としてあつかったり、分数がはいった式を自由に操作したりできないと、中学校の数学の学習がやりにくくなることがあります。

このファイルでは、算数で学習する分数についての内容を学び直し、数学の学習につなげることをめざします。ただし、内容は算数で学習する内容をひととおり扱っていますが、その説明はかなり「わりきった」ものとなっています。算数の教科書のように長さやジュースの量をあらわす図をつかってていねいに説明するのではなく、さいしょに書かれた 2 つの「きまり」にもとづき、できるだけシンプルに説明していきます。

とにかく数としての分数になれていきますので、説明がよくわからないときは、別の分数をつかって同じように計算してみてください。分数に「さわって」なじんでいくことで、分数もふつうの数だと感じられるようになっていきましょう。

新しい数を作る

1、2、3、‥‥といった数とその計算を学習してきたことをいかして、ここでは「分数」という新しい数を作ることを考えます。

新しい数のきまり１：<u>2 つ</u>たしあわせると 1 になる数を新しく考えて、これを $\frac{1}{2}$ とします。 <u>3 つ</u>たしあわせると 1 になる数を新しく考えて、これを $\frac{1}{3}$ とします。 同じように $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、‥‥という数を新しく作ります。

きまり１から、例えば次のことがわかります。

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

$\frac{1}{2}$ は 2 つたしあわせると 1 になるので、は<u>1 より小さい数</u>になります。同じように $\frac{1}{3}$ や $\frac{1}{4}$ も 1 より小さい数になります。

こうした 1 より小さい数を新しく考えると、例えば 1 m のテープをいくつかにわけたときの長さや、1 L のジュースを何人かでわけたときの量を、m や L をつかって表すことができるようになります。例えば、1 L のジュースを 5 人で等しくわけたときの 1 人分の量は、5 つあわせると 1 L にもどるような量ですから、$\frac{1}{5}$ という数をつかって $\frac{1}{5}$ L と表すことができます。

ここで新しく作った $\frac{1}{5}$ などの数は、横線の上と下に数字を書いていて、今までの 8 や 143、15928 などとは少し見え方がちがいます。でも、この横線と上下の 2 つの数字で、8 や 143、15928 と同じように、<u>一つの数</u>を表しています。

新しい数のきまり２： $\frac{1}{5}$ を <u>2 つ</u>たしあわせた数を $\frac{2}{5}$ といいます。

$\frac{1}{5}$ を <u>3 つ</u>たしあわせた数を $\frac{3}{5}$ といいます。

$\frac{1}{5}$ を <u>8 つ</u>たしあわせた数を $\frac{8}{5}$ といいます。

きまり２ときまり１とから、例えば次のことがわかります。

$$\frac{5}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=1$$

さらに、 $\frac{15}{5}$ は $\frac{1}{5}$ を 15 こたしあわせた数なので、 $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ が 3 回あらわれます。だから $\frac{15}{5}=3$ となることがわかります。

分子と分母

きまり１に出てきた、いくつかたしあわせると 1 になる数のことを「**単位分数**」といいます。「単位」というのは、何かを作るときに基本となる部品のような役割を果たすという意味です。

きまり２に出てきた、単位分数をいくつかたしあわせてできる数と、単位分数とをあわせて「**分数**」といいます。

分数は単位分数を 1 つ以上たしあわせたような数のことです。

横線の上にある数を「**分子**」、横線の下にある数を「**分母**」といいます。

分母はこの分数がどの単位分数をもとにしてできているかを表しています。

$$\frac{2}{3}$$

2 ← 分子

3 ← 分母

分子はその単位分数がいくつたしあわされてできているかを表しています。

$\frac{2}{3}$ の分母３はこの分数が $\frac{1}{3}$ という単位分数をもとにして作られていることを、分子２はこの単位分数を 2 つたしあわせた数であることを示しています。

分数と倍

4の2つ分、3つ分のことを「4の2倍」「4の3倍」といいました。

$\frac{3}{5}$ は $\frac{1}{5}$ を3つたしあわせた数なので、おなじように「$\frac{3}{5}$ は $\frac{1}{5}$ の3倍」ということができます。

$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times 3$ （$\frac{3}{5}$ は $\frac{1}{5}$ の3倍）

$\frac{8}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times 8$ （$\frac{8}{5}$ は $\frac{1}{5}$ の8倍）

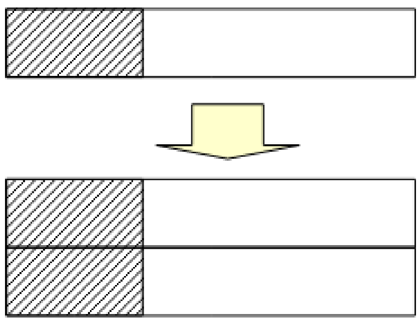
$3=\frac{15}{5}=\frac{1}{5}\times 15$ （3は $\frac{1}{5}$ の15倍）

分数のメリット

1÷7がいくつになるかは、このままでは考えにくそうです。でも1÷7の答えは7倍して1になる数のはずです。これは**きまり1**から $\frac{1}{7}$ のことになります。

$$1\div 7=\frac{1}{7}$$

　では2÷3の答えは、いくつと考えたらよいでしょう。答えになる数は3倍して2になるような数です。3倍して2になる数は、3倍して1になる数の2倍の数になりそうです。3倍にして1になる数は $\frac{1}{3}$ でしたから、3倍して2になる数はその2倍の数、つまり $\frac{2}{3}$ となります。



$$2\div 3=\frac{2}{3}$$

　このように、分数をもちいると、わり算の答えを表すことができます。またこのあと学習するように、分数についてもたし算、ひき算、かけ算、わり算ができるので、その答えをほかの計算の中で利用することもできるようになります。

同じとみなせる分数

$\frac{2}{4}$ は $\frac{1}{4}$ を2つたしあわせた数です。なので、 $\frac{2}{4}$ を2つたしあわせると $\frac{1}{4}$ を4つたしあわせたことになりますが、これは**きまり1**により1になります。つまり、 $\frac{2}{4}$ は2つたしあわせると1になる数です。

でも2つたしあわせると1になる数は $\frac{1}{2}$ でした。そこで「**分数の世界**」では、 $\frac{2}{4}$ と $\frac{1}{2}$ は同じ数と考えます。

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

同じ理由により、 $\frac{3}{6}$ も $\frac{4}{8}$ も $\frac{5}{10}$ も $\frac{1}{2}$ と同じ数と考えます。

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\cdots$$

$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{6}$ を2つたしあわせた数です。なので、 $\frac{2}{6}$ を3つたしあわせると $\frac{1}{6}$ を6つたしあわせた数ですが、これは**きまり1**により1になります。つまり、 $\frac{2}{6}$ は3つたしあわせると1になる数です。

でも3つたしあわせると1になる数は $\frac{1}{3}$ といいました。そこで、「分数」の世界では、 $\frac{2}{6}$ と $\frac{1}{3}$ は同じ数と考えます。

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

同じ理由により、 $\frac{3}{9}$ も $\frac{4}{12}$ も $\frac{5}{15}$ も $\frac{1}{3}$ と同じ数と考えます。

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\cdots$$

$\frac{3}{4}$ は $\frac{1}{4}$ を3つたしあわせた数です。上で見てきたように、 $\frac{1}{4}$ は $\frac{2}{8}$ や $\frac{3}{12}$ や $\frac{4}{16}$ と同じ数と考えるのでした。なので、 $\frac{3}{4}$ は $\frac{2}{8}$ の3つ分や $\frac{3}{12}$ の3つ分や $\frac{4}{16}$ の3つ分と同じになると考えることができます。

$$\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{2}{8}\times 3=\frac{6}{8}$$

$$\frac{3}{12}+\frac{3}{12}+\frac{3}{12}=\frac{3}{12}\times 3=\frac{9}{12}$$

$$\frac{4}{16}+\frac{4}{16}+\frac{4}{16}=\frac{4}{16}\times 3=\frac{12}{16}$$

なので、

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\cdots$$

1や25、28754といった数のときは、2つの別々の数を同じと考えることはありませんでした。しかし「**分数の世界**」では、ある分数と同じ数と考えることのできる数が無数に多くあります。

今までの数のイメージからすると、これはちょっと変なことです。しかしこの後で学習するように、同じと考えることのできる分数を利用することで、分数の計算がやりやすくなります。

ある分数について考えているときに、それと等しいけれど違う形をした分数へと変身させることで、考えをさらにすすめていけるようになります。これは以下で見ていくように強力な方法であり、**分数の世界**の楽しさのひとつです。

ここまで調べてきた結果を並べて、観察してみましょう。

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\cdots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\cdots$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\cdots$$

これらを観察すると、次のようなことに気づきます。

分数の特ちょう１： 分子と分母に同じ数をかけてできる分数は、もとの分数に等しい。
分数の特ちょう２： 分子と分母を同じ数でわってできる分数は、もとの分数に等しい。

これらの特ちょうをもちいると、ある分数と同じ分数をかんたんに作ることができます。

例えば、 $\frac{4}{6}$ の分子と分母に 2 をかけると $\frac{8}{12}$ となります。**特ちょう１**からこれらの分数は等しくなります。

$$\frac{4}{6}=\frac{4\times2}{6\times2}=\frac{8}{12}$$

また $\frac{4}{6}$ の分子と分母を 2 でわると $\frac{2}{3}$ となりますが、**特ちょう２**からこれらの分数も等しくなります。

$$\frac{4}{6}=\frac{4\div2}{6\div2}=\frac{2}{3}$$

分子と分母を同じ数でわって等しい分数をつくると、分子と分母をもっと小さい数にすることができるので、分数がイメージしやすくなります。このようにして分数をイメージしやすくすることを「**約分**」といいます。
また 2 つの分数について、**特ちょう１**や**特ちょう２**を使って分母をそろえると扱いやすくなります。これを「**通分**」といいます。

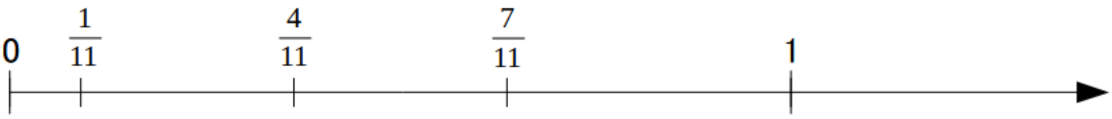
分数の大小

3＜4 や 256＞247 のように、2 つの数についてどちらの方が大きいか、どちらの方が小さいかを考えることができました。

分数についても、2 つの分数の間で大小を比較することができます。

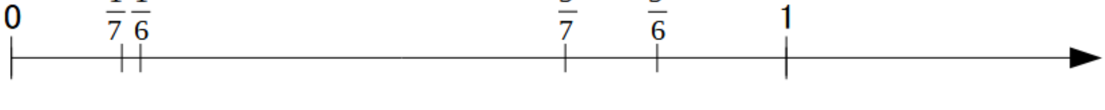
$\frac{4}{11}$ と $\frac{7}{11}$ を考えると、きまり２から $\frac{4}{11}$ は $\frac{1}{11}$ を 4 つたしあわせた数、$\frac{7}{11}$ は $\frac{1}{11}$ を 7 つたしあわせた数です。$\frac{1}{11}$ をたすほど大きくなるので、$\frac{4}{11}$ より $\frac{7}{11}$ の方が大きくなります。

$$\frac{4}{11} < \frac{7}{11}$$



$\frac{5}{6}$ と $\frac{5}{7}$ を考えると、きまり２から $\frac{5}{6}$ は $\frac{1}{6}$ を 5 つたしあわせた数、$\frac{5}{7}$ は $\frac{1}{7}$ を 5 つたしあわせた数です。きまり１から $\frac{1}{6}$ は 6 つたしあわせると 1 になる数、$\frac{1}{7}$ は 7 つたしあわせると 1 になる数なので $\frac{1}{6} > \frac{1}{7}$ となります。大きい数を 5 つたしあわせる方が大きくなるので、$\frac{5}{7}$ より $\frac{5}{6}$ の方が大きくなります。

$$\frac{5}{6} > \frac{5}{7}$$



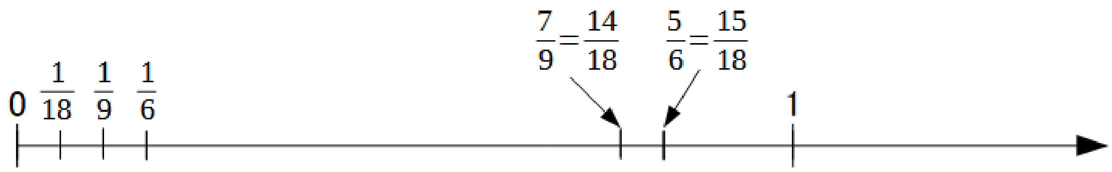
$\dfrac{5}{6}$ と $\dfrac{7}{9}$ の大小を考えます。2つの分数の分母がそろっていれば、上で考えたように、大小を比べることができました。そこで、**特ちょう1**をつかって2つの分数を通分することにします。

$$\frac{5}{6}=\frac{5\times2}{6\times2}=\frac{5\times3}{6\times3}=\frac{5\times4}{6\times4}=\cdots$$

$$\frac{7}{9}=\frac{7\times2}{9\times2}=\frac{7\times3}{9\times3}=\frac{7\times4}{9\times4}=\cdots$$

分母が18のところで揃うので、 $\dfrac{5}{6}=\dfrac{5\times3}{6\times3}=\dfrac{15}{18}$ と $\dfrac{7}{9}=\dfrac{7\times2}{9\times2}=\dfrac{14}{18}$ で比べると、

分子が大きい方が大きいので $\dfrac{15}{18}>\dfrac{14}{18}$ 、つまり $\dfrac{5}{6}>\dfrac{7}{9}$ 。



めやすになる大きさ

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{5}{10}=\cdots$ なので、分子が分母の半分になっている分数は $\dfrac{1}{2}$ と同じです。ですから、 $\dfrac{2}{5}$ のように分子が分母の半分より小さい分数は $\dfrac{1}{2}$ より小さいです。逆に、 $\dfrac{3}{5}$ のように分子が分母の半分より大きい分数は $\dfrac{1}{2}$ より大きいです。

$\dfrac{5}{3}$ のように分子が分母より大きい分数は1より大きいです。さらに $\dfrac{7}{3}$ のように分子が分母の2倍より大きい分数は2より大きいです。

分数と分数の間

1、2、3、……とかぞえるとき、1と2の間や2と3の間には、ほかに数はありません。1のすぐ次が2で、2のすぐ次が3です。

では $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ の間にほかに分数はあるでしょうか。 $\frac{1}{3}$ の1つ分の数と $\frac{1}{3}$ の2つ分の数なので、 $\frac{1}{3}$ のすぐ次が $\frac{2}{3}$ のように見えます。でも、それぞれの分数を**特ちょう1**をつかって等しい分数に変えてみたらどうでしょう。

$$\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{6}\text{、}\quad \frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$$

すると $\frac{1}{6}$ が2つ分の数と4つ分の数となるので、間に $\frac{1}{6}$ が3つ分の数、つまり $\frac{3}{6}$ があることがわかります。**特ちょう2**をつかって、分子と分母を3でわると、 $\frac{3}{6}=\frac{3\div3}{6\div3}=\frac{1}{2}$ となり、 $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ の間に $\frac{1}{2}$ があることがわかります。

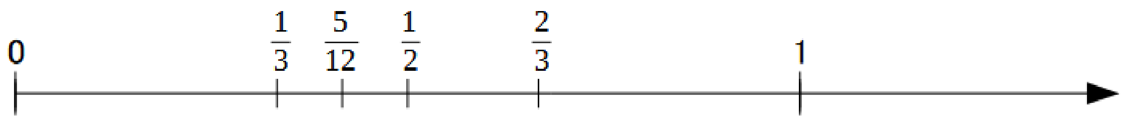
$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

では $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の間にはほかの数があるでしょうか。同じように $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{2}$ を**特ちょう1**をつかって等しい分数に変えてみると、例えば、

$$\frac{1}{3}=\frac{1\times4}{3\times4}=\frac{4}{12}\text{、}\quad \frac{1}{2}=\frac{1\times6}{2\times6}=\frac{6}{12}$$

となるので、その間に $\frac{5}{12}$ という数があることがわかります。

このように、分数と分数の間には、いつでも別の数があります。これも今までの数とちがうところです。



分数のたし算とひき算

$\frac{2}{9}$ と $\frac{5}{9}$ をたしてみます。 $\frac{2}{9}$ は $\frac{1}{9}$ を 2 つたしあわせた数、 $\frac{5}{9}$ は $\frac{1}{9}$ を 5 つたしあわせた数なので、あわせて $\frac{1}{9}$ を 7 つたしあわせた数になります。

分子の 2 と 5 が $\frac{1}{9}$ をいくつたしあわせた数かをそれぞれあらわしていたので、 $\frac{2}{9}$ と $\frac{5}{9}$ をあわせたときの $\frac{1}{9}$ の個数は分子をたし算した数になります。

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+5}{9}=\frac{7}{9}$$

このように、分数のたし算では単位分数がいくつあるかを考え、その個数を考えることで分数のたし算を行うことができます。

今度は $\frac{2}{9}$ と $\frac{5}{6}$ をたしてみます。分母が異なるのでこのままではたせません。そこで、**通分**をつかって 2 つの分数の分母をそろえてみます。

$$\frac{2}{9}=\frac{4}{18}=\frac{6}{27}=\frac{8}{36}=\frac{10}{45}=\cdots$$

$$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{20}{24}=\frac{25}{30}=\cdots$$

分母を 18 にそろえて、それぞれの分数が $\frac{1}{18}$ をいくつたしあわせた数かを考えると、2 つの分のたし算をすることができます。

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{6}=\frac{4}{18}+\frac{15}{18}=\frac{4+15}{18}=\frac{19}{18}$$

このように、分母が異なる分数をたすときは、**通分**をして分母をそろえると、たし算をすることができます。**通分**は、2 つの分数を共通の単位分数を用いてあらわしなおすことだと考えることができます。

$\frac{5}{7}$ から $\frac{3}{7}$ をひくことを考えてみます。$\frac{5}{7}$ は $\frac{1}{7}$ を5つたしあわせた数、$\frac{3}{7}$ は $\frac{1}{7}$ を3つたしあわせた数でした。$\frac{5}{7}$ から $\frac{3}{7}$ をひくと $\frac{1}{7}$ が2つだけのこります。ですから、$\frac{5}{7}$ から $\frac{3}{7}$ をひいたときの答えは $\frac{1}{7}$ を2つたしあわせた数なので $\frac{2}{7}$ となります。

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$$

次にたし算のときと同じように、分母が異なる分数のひき算を考えてみます。例えば $\frac{3}{4}$ から $\frac{2}{6}$ をひいてみます。ひき算でも、**通分**をつかって2つの分数の分母をそろえてみます。

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\cdots$$

$$\frac{2}{6}=\frac{4}{12}=\frac{6}{18}=\frac{8}{24}=\cdots$$

分母を12にそろえて、それぞれの分数が $\frac{1}{12}$ をいくつたしあわせた数かを考えると、2つの分のひき算をすることができます。

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{6}=\frac{9}{12}-\frac{4}{12}=\frac{9-4}{12}=\frac{5}{12}$$

このように、分母が異なる分数のひき算をするときも、**通分**をして分母をそろえると、ひき算をすることができます。

分数をかけるかけ算

分数と倍について考えたときに、

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}\times3、\ \frac{8}{5}=\frac{1}{5}\times8、\ \frac{15}{5}=\frac{1}{5}\times15$$

であることを確認しました。

では、$\frac{3}{5}\times2$ はいくつになるでしょう。$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}\times3$、つまり $\frac{3}{5}$ は $\frac{1}{5}$ を 3 つたしあわせた数で、その 2 倍を考えるので、$\frac{1}{5}$ の個数は 3×2 で 6 個になります。ですから、$\frac{3}{5}\times2$ の答えは $\frac{1}{5}$ を(3×2)個たしあわせた数なので、$\frac{6}{5}$ となります。

$$\frac{3}{5}\times2=\left(\frac{1}{5}\times3\right)\times2=\frac{1}{5}\times(3\times2)=\frac{1}{5}\times6=\frac{6}{5}$$

ではかける数も分数だったらどうでしょう。まず、$\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}$ を考えてみます。

このかけ算の答えを□としてみます。つまり、$\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=$ □です。ここで□を 4 倍するとどうなるでしょう。

$$□\times4=\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\right)\times4=\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{4}\times4\right)=\frac{3}{5}\times1=\frac{3}{5}$$

ここから、□は 4 倍すると $\frac{3}{5}$ になるような数であることがわかります。

4 倍して $\frac{3}{5}$ になる数とは、どのような数でしょう。このままではわかりにくいので、**特ちょう 1** をつかって等しい分数に変えてみます。

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times4}{5\times4}=\frac{3}{5\times4}\times4$$

このように考えると、$\frac{3}{5\times4}=\frac{3}{20}$ を 4 倍すると $\frac{3}{5}$ になることがわかります。

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{5\times4}=\frac{3}{20}$$

$\times\frac{1}{7}$ であれば、7 倍してかけられる数になる数をさがすことになりますから、分子と分母を 7 倍して等しい分数にすると、答えを見つけることができます。

今度は $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}$ の答えをもとめてみましょう。 $\frac{4}{7}=\frac{1}{7}\times4$ であることをつかうと、$\frac{3}{5}$ を $\times\frac{1}{7}$ して、さらに 4 倍すればよさそうです。$\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{5\times7}$ でしたから、これを 4 倍して、

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{7}\times4\right)=\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}\right)\times4=\frac{3}{5\times7}\times4=\frac{3\times4}{5\times7}=\frac{12}{35}$$

$\frac{3}{5}\times\frac{13}{9}$ では、まず 9 つたしあわせると $\frac{3}{5}$ になるような数を作り、次にその数の 13 倍を求めます。そこで次のようになります。

$$\frac{3}{5}\times\frac{13}{9}=\frac{3}{5}\times\left(\frac{1}{9}\times13\right)=\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{9}\right)\times13=\frac{3}{5\times9}\times13=\frac{3\times13}{5\times9}=\frac{39}{45}$$

$\frac{3}{5}=\frac{3\times7}{5\times7}=\frac{21}{35}$ ですが、 $\frac{21}{35}>\frac{12}{35}$ なので $\frac{3}{5}>\frac{12}{35}$ です。

$\frac{3}{5}=\frac{3\times9}{5\times9}=\frac{27}{45}$ ですが、 $\frac{27}{45}<\frac{39}{45}$ なので $\frac{3}{5}<\frac{39}{45}$ です。

$\frac{4}{7}$ をかけると、7 つたしあわせれば $\frac{3}{5}$ になる数を <u>4 倍しか</u>しないので、答えは $\frac{3}{5}$ より小さくなります。 $\frac{13}{9}$ をかけると、9 つたしあわせると $\frac{3}{5}$ になる数を <u>13 倍も</u>するので、答えは $\frac{3}{5}$ より大きくなります。

かける数が 1 より大きいか小さいかにより、答えは元の数より大きくなったり小さくなったりします。

分母や分子にある式

ここまで考えてきた中で、$\frac{3}{5\times7}$ や $\frac{3\times7}{5\times7}$ のように、分母や分子にかけ算の式がはいっていることがありました。もちろん、5×7=35 や 3×7=21 と計算して、$\frac{3}{35}$、$\frac{21}{35}$ としてもよいのですが、**特ちょう１**と**特ちょう２**をつかうためには、かけ算のままにしておく方がべんりなこともあります。

例えば上で、$\frac{3}{5}\times\frac{13}{9}$ を考えたときに、$\frac{3\times13}{5\times9}=\frac{39}{45}$ と答えをもとめました。でも $\frac{3\times13}{5\times9}=\frac{13\times3}{5\times3\times3}$ とかけ算のままにしておくと、これが $\frac{13}{5\times3}$ の分子と分母に 3 をかけたものであることがすぐわかり、**特ちょう１**からこれが $\frac{13}{5\times3}=\frac{13}{15}$ と等しくなることが見えやすくなります。

分数倍

1 は「1 つで 1 になる数」と考えると、**きまり１**から $1=\frac{1}{1}$ となります。なので、15 であれば 1 の 15 倍ですから、$15=1\times15=\frac{1}{1}\times15=\frac{15}{1}$ と考えることができます。

さらに**特ちょう１**をつかうと $15=\frac{15}{1}=\frac{30}{2}=\frac{45}{3}=\frac{60}{4}=\cdots$ とさまざまな分数として 15 を表すことができます。

つまり、15、29、3518 といった数も、分数で表すことができます。分数で表すと、分数と分数をかけるかけ算をつかうことができます。

例えば、72 人が参加している会議で「さんせいが参加者の３分の２以上」という場合、$72\times\frac{2}{3}=\frac{72}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{72\times2}{1\times3}$ として「３分の２」の人数を求めることができます。72=24×3 であることに注意し、**特ちょう２**をもちいると 48 人とわかります。

分数でわるわり算

$\frac{3}{5}\div 3$ の答えは3倍して $\frac{3}{5}$ になる数です。 $\frac{3}{5}=\frac{1}{5}\times 3$ でしたから、3倍して $\frac{3}{5}$ になる数は $\frac{1}{5}$ とわかります。

$$\frac{3}{5}\div 3=\frac{1}{5}$$

では $\frac{3}{5}\div 7$ ならどうでしょう。このままではわかりにくいので、**特ちょう1**をつかって等しい分数に変えてみます。

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times 7}{5\times 7}=\frac{3}{5\times 7}\times 7$$

ここから $\frac{3}{5}\div 7$ の答え、つまり7倍して $\frac{3}{5}$ になる数は、 $\frac{3}{5\times 7}$ とわかります。

$$\frac{3}{5}\div 7=\frac{3}{5\times 7}$$

わる数が分数のわり算はどうしたらよいでしょう。

例えば $\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}$ を考えてみます。この答えは $\frac{2}{7}$ 倍すると $\frac{3}{5}$ になる数です。その数を $\frac{\square}{\triangle}$ としてみると、

$$\frac{\square}{\triangle}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{5}$$

となるはずです。ここで $\frac{\square}{\triangle}\times\frac{2}{7}=\frac{\square\times 2}{\triangle\times 7}$ でしたから、 $\frac{\square\times 2}{\triangle\times 7}=\frac{3}{5}$ となるはずです。ただこのままでは、□や△がいくつになるか、よくわかりません。

そこで、**特ちょう1**をつかって、 $\frac{3}{5}$ をほかの等しい分数にかえてみます。分子と分母に2と7があるとくらべやすくなりそうなので、分子と分母に2と7が入る形にしてみます。

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times2}{5\times2}=\frac{(3\times2)\times7}{(5\times2)\times7}=\frac{(3\times7)\times2}{(5\times2)\times7}$$

これと $\frac{\square\times2}{\triangle\times7}$ を見くらべると、□は 3×7、△は 5×2 とわかります。なので、

$$\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}=\frac{3\times7}{5\times2}$$

あるいは、次のように考えることもできます。

$\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}=\frac{\square}{\triangle}$ のとき $\frac{\square}{\triangle}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{5}$ でした。つまり $\frac{\square}{\triangle}\times\frac{2}{7}$ と $\frac{3}{5}$ は等しいので、それぞれを $\frac{7}{2}$ 倍してもやはり等しいと考えられます。

$$\left(\frac{\square}{\triangle}\times\frac{2}{7}\right)\times\frac{7}{2}=\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}$$

$\left(\frac{\square}{\triangle}\times\frac{2}{7}\right)\times\frac{7}{2}$ を計算すると $\frac{\square}{\triangle}\times\left(\frac{2}{7}\times\frac{7}{2}\right)=\frac{\square}{\triangle}\times\frac{2\times7}{7\times2}=\frac{\square}{\triangle}\times1=\frac{\square}{\triangle}$ 、 $\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}$ を計算すると $\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}=\frac{3\times7}{5\times2}$ なので、あわせて $\frac{\square}{\triangle}=\frac{3\times7}{5\times2}$ となります。つまり、

$$\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}=\frac{3\times7}{5\times2}$$

二番目の考え方だと、なぜ分数でわるわり算では、わる数をひっくり返してかけるのかもわかります。

逆数

$\frac{2}{7}$ と $\frac{7}{2}$ のように分子と分母が逆になっている 2 つの分数をかけると、上でみたように 1 となります： $\frac{2}{7}\times\frac{7}{2}=1$ 。そのため、1 にしたいときにこのペアをつかうことがあります。このとき一方を他方の**逆数**といいます。 $\frac{7}{2}$ は $\frac{2}{7}$ の逆数で、 $\frac{2}{7}$ は $\frac{7}{2}$ の逆数です。分数でわるときはわる数の逆数をかけるといえます。

まとめ

最初にかいた通り、分数は 4 や 23、9.7 と同じように数です。ただ 23 や 9.7 ではどの数字もその位の数がいくつあるかをあらわしているのに対して、分数では分母と分子ではその役割が全くことなっていました。

また、これまでの数とちがい、見た目がことなる 2 つの分数がじつは同じ数であるということもありました。しかし、かえってこのこと（分数の特ちょう 1 と２）があるからこそ、分数の大小をくらべたり、たし算やひき算をしたり、さらにはかけ算やわり算のやり方を考えることができました。同じ数がいろいろなあらわれ方をすることが、分数のつよみでもあったわけです。

これまでの数とはことなる面をもつ分数ですが、基本的には以下のような分数のきまりだけに基づいていました。

・$\frac{1}{5}$ は 5 つたしあわせると 1 になる数であるといったこと。

・$\frac{3}{5}$ は $\frac{1}{5}$ を 3 つたしあわせた数であるといったこと。

またかけ算とわり算は以下の考え方を基本に考えてきました。

・かけ算はある数の何倍かした数を求めること

・わり算は何倍かしたときにある数になる数を求めること

$2 \div 3$ の商を $\frac{2}{3}$ と表しても、単に横に並んだ 2 と 3 をたてに並べかえただけのようにも見えます。しかし商を分数という数で表すことで、他の式の中で使ったり、計算をさらに進めることもできます。また m や kg などの単位といっしょにもちいれば、どのような量かを他の人に伝えることもできます。

中学校で文字をつかうようになると、並べかえだけのように見える分数の方がかえって便利になってきます。分数を「ふつうに」数としてつかえるようにして、中学校の数学の学習につなげていきましょう。