

算数の比例・反比例から中学校の比例・反比例へ

上越教育大学

布川 和彦

小学校6年生のときに比例と反比例の学習をしました。ところが、中学校に入るとまた、比例と反比例の学習があります。どうして2年も続けて学習をするのでしょうか。

もちろん、中学校に入って負の数を学習するので、負の数を含める形で改めて比例と反比例を学習するということもあります。また、中学校の学習では「関数」という言葉が出てきますから、比例と反比例を関数という観点でとらえなおす、という違いもあります。

ただそうした学習の中で、少し見えづらいのですが、中学校らしい学習への転換もいっしょに行われています。そして、その転換に気がつかずにいると、だんだん何を学習しているのかが見えなくなってきた、結局、単元が終わったときに何を学習したのかもわからなくなってしまうかもしれません。

ここでは中学校1年生で学習する比例と反比例について、その転換に焦点を当てて考えてみます。それにより、中学校で関数を学習するための基本的な見方を身につけていきましょう。

目 次

6年生の学習のふり返し

中学校 1 年生での転換

「関数」の呼び方

変量から変数へ

変化と対応の逆転

対応の決め方

関数としての比例・反比例

算数の比例・反比例との違い

おわりに

【おまけ】 関数としての比例・反比例の探求

6年生の学習のふり振り返り

6年生で比例を学習したとき、次のような場面を考えました。

- ・水そうに水を入れると水の深さが変わっていく場面
- ・針金の長さを変えると針金の重さも変わるという場面
- ・紙の枚数を変えると紙の重さも変わるという場面
- ・分速 80 m で歩いた時間が変わると歩いた距離も変わるという場面
- ・正方形の 1 辺の長さを変えると周りの長さも変わるという場面

こうした場面については、実際にその場面を観察したり、あるいは実際に観察はしなくても、これまでの経験をもとに場面のようすをイメージしたりすると、量の変わり方についていろいろなことがわかりました。

まずどの場面でも、一方の量を変えると他方の量もそれにともなって変わります。針金の長さを変えると針金の重さも変わる、といったことです。

また単に一方を変えると他方も変わるというだけでなく、一方を増やすと他方もそれにともなって増えるということもわかります。同じ針金であれば、長さを長くするほど重さも重くなるだろうとわかります。

さらにくわしく調べると、単に一方を増やすと他方も増えるというだけでなく、一方を 2 倍にすると他方も 2 倍に、一方を 3 倍にすると他方も 3 倍になることにも気づきます。例えば、針金の長さを 2 倍にすると針金の重さも 2 倍になるでしょうし、長さを 3 倍にすると重さも 3 倍になりそうです。

増え方については、一方を「1」だけ増やしたら、ということも気になります。すると、一方を 1 だけ増やすと、他方がいつも同じだけ増えることが見えてきます。例えば、針金の長さをある長さから 1 cm だけ増やすと、針金の重さはもとの長さに関わらず、いつでも 1.2 g だけ増える、といった特徴です。

それぞれの量の数値の部分だけに着目すると、一方の量の数値をきまった数にかけるといつも他方の量の数値になることにも気づくかもしれません。例えば、針金の長さが 2 cm のときは重さが 2.4 g、3 cm のときは 3.6 g、4 cm のときは 4.8 g、…となっている場合、それぞれの長さの数値 2、3、4、…を 1.2 にかけるとそ

のときの重さの数値 2.4、3.6、4.8、…になっています。ここから、針金の長さとう重さの関係を「針金の重さの数値 $=1.2\times$ 針金の長さの数値」という式で表すこともできそうです。

算数の学習では、いろいろな場面で観察される「ともなうて変わる2つの量」について、上のような観点から調べたり、見出した関係をことばやグラフ、式に表したりしました。

つまり、ある場面で観察されるとともなうて変わる量について、どのような観点で調べたらよいかや、見出した関係をどのように表現したらよいかといった、場面の探求の仕方について、学習をしてきました。そして、ある場面で観察された関係を、比例や反比例という言葉で特徴づけました。

中学校1年生での転換

中学校1年生のときも、最初は、水そうに水を入れる場面などで学習が始まります。しかし途中から、そうした場面は現れなくなり、どのような場面かの説明もないままにグラフをかいたり、式で表したりすることが求められます。

実は、1年生の学習の中で、6年生のときのような場面の探求の仕方を学習することから、関係の探求の仕方を学習することへと、学習の目標が転換しているのです。

そのために、2つの新しいアイデアが導入されます。一つは「変数」で、もう一つは「関数」です。

(1) 変数

中学校では、上の場面の数値だけに着目したときのように、1には1.2、2には2.4、3には3.6、…というように、数と数の関係だけを純粹に考えることとなります。経過していく時間とか増えていく水、自動車の進んでいく距離といった動きのある量は、中学校の学習では現れなくなります。

ただ、長さや重さといった量がなくなると、関係を調べるときに次のような困ったことが出てきます。

- ・長さや時間のときと同じように、いろいろな値の場合に関係がどうなるかを調べたいので、「長くする」とか「時間が変わる」とか言えなくても、いろ

いろな値の場合があることを表現したい。

- ・ 関係を話題にしたいけど、長さや重さといった量の話ではないので、「長さと重さの関係」のように何と何の関係をどう表現したらよいか困る。

そこで登場するのが「変数」というアイデアです。6年生で考えた量の中の、「値がいろいろに変わる」という性質と、「長さ」や「重さ」のように名前で区別できるという特徴だけを取り出して、変数として使おうというのです。

- ・ 変数で「値をいろいろに変えることができる」ことを表す
- ・ 「～と～の関係」の「～」の部分で使えるように x とか y という

文字で名前をつけ、いくつかの変数を区別できるようにする
つまり「値をいろいろ変えることのできる文字」が変数です。これにより「2つの量『長さ』と『重さ』の関係」と言うのと同じようにして、「2つの変数 x と y の関係」と表現することができるようになります。

実際、変数を英語では variables と呼びますが、これは「変わる」という意味の vary と「可能な」という意味の able からできています。「量」を意味する quantities とあわせて variable quantities とすると「変量」、つまり変化しうる量という意味になります。この変量から変化しうるという性質を取り出し、変化しうるという性質だけを純粋に表すようにしたのが変数ということになります。中学校の学習では「変量」への着目から「変数」への着目への転換が生じているのです。

変量である長さでは、0 cm や 23 cm、15.2 cm、 $\frac{17}{5}$ cm など、いろな値の場合を考えることができました。変量の重さでも、80 g、132 g、48.5 g、 $25\frac{1}{3}$ g など、いろな値の場合を考えることができました。

同じように、変数でもいろな値の場合を考えることができます。ただし、変量では最初からいろな値が自然に想定されていましたが、変数は単なる文字ですから、私たちが変数のためにいろな値を考えてあげないいろな値になってくれません。ですから、変数 x や y に、いろな値を自分から代入して考えることが必要なのです。（参考：[代入のすすめ](#)）

変数の値として考えてよい範囲のことをその変数の変域と呼びますが、特に

変域についての条件がなければ、すべての数を考えてよいのです。したがって、着せ替えのように、変数にはどのような値を代入してもよいことになります。

（２）関数

上で見たような場面では、ある時間のときの水の深さとか、ある長さのときの針金の重さなど、２つの量の関係を調べました。数値だけを取り出した変数についても、２つの変数の間の関係を調べることになります。変数の場合と同じように、量の間の関係を数値の間の関係として取り出し、関係自体を考えやすくしたのが「関数」です。

ですから、関数は２つの変数の間の関係です。ただ、量の関係とちがい、単にいろいろな値を考えられる変数の間の関係ですから、後で見るように、日常の場面の制約にとらわれずに、自由に関係を決めることができます。その結果、いろいろな種類の関数があることがわかってきます。世界中をさがすと、いろいろな種類の犬がいるのと同じように、いろいろな種類の関数があるのです。

そのようにして、私たちの扱える関係の種類を豊かにし、そしてそれぞれの関係の性質を探っていこうというのが、関数というアイデアを用いる理由です。

とは言え、あまりむちゃくちゃな関係では、私たちが関係を探求しにくくなってしまいます。そこで、量の関係を参考にして、関数として扱う関係に、最低限の制約だけは課すことにします。

算数で考えていた量の関係では、「針金の長さが 26 cm のときの重さは 31.2 g、34 cm のときの重さは 40.8 g」などと、一方の量の数値を決めると、他方の量の数値もきちんと一つに決まりました。このような状態は、「対応」という言葉で表されます。例えば「針金の長さに対応して重さが決まる」と表現されます。

対応は *correspondence* と言いますが、この英単語は手紙やメールのやり取りの意味でも使われます。数学の「対応」も、一方の量からメールが来たら、他方の量がこれに応じて一つの数値を返信するといったイメージです。対応を上下に並べて整理したのが表でした。

もしもある一人の人にメールをしたのに、いくつも返信が返ってきて、しかもその内容がバラバラだったら、私たちはどう考えてよいかわからなくなります。あるいは、ある 1 本の針金を調べているのに、「長さが 26 cm のときの重さは

31.2 g のときもあるし、40.8 g のときもあるし、7 g のときもある」と言われたら、この針金の長さとうりとの関係をどう考えてよいのかわからなくなります。同じように、2 つの変数の場合も、一方の数値に対応して他方の数値が一つに決まらないと、それらの変数の間の関係を探求しづらくなります。

そこで、変数の間の関係で、一方の数値に対応して他方の数値をきちんと一つに決めることができる関係だけを、関数として考え、その性質を探求することにします。言い換えると、私たちが一方の変数の値を聞いたときに、他方の変数の値を決めることができるような関係、ということです。「作ろうと思えば対応の表を作ることができる」と言ってもいいかもしれません。

関数は、一方の変数の値を一つ決めたとき、それに対応して他方の変数の値をただ一つだけ決めることができるような関係

関数は英語では functions と言いますが、function の基本的な意味は「機能」とか「はたらき」でした。関数は一方の変数に他方の変数に対応させるはたらき、といったイメージです。その「はたらき」をくわしく調べるために取り出し、名前をつけてはっきりさせたのが「関数」です。

このようにして、中学校の学習では、ともなうて変わる変数を探求することから、2 つの変数の関数を調べることへの転換が行われることになります。

ですから、中学校で関数に関わる学習をするときには、今考えているのは変数の間のどのような関係なのか、その関係にはどのような特徴があるのか、関係の特徴はどのように調べるとよいのか、どのような点に目を向けて調べればよいのか、といったことを考えながら学習することになります。つまり、自分が探求しているのが、場面ではなく関数という関係自体だということを思い出すとよいでしょう。

「関数」の呼び方

先ほど見たように、関数は、一方の変数の値を一つ決めたとき、それに対応して他方の変数の値をただ一つだけ決めることができるような、2 つの変数の間

の関係です。このとき、最初に値を決める方の変数を、独立変数と呼びます。英語では independent variables と呼ばれ、他を気にすることなく、自由に値を決めることができます。これに対して、独立変数の値に応じて値を決めることになる変数の方を、従属変数と呼びます。英語では dependent variables ですが、dependent on ～は、～に頼っている、～に左右される、といった意味でした。

変数 x が独立変数、 y が従属変数のとき、 x に対応して y を決めるという関係を強調する場合は、「 y は x の関数である」とも表現します。変数 x を規則的に変えていくと、それに対応して y がどのように決まっていくか、またそれにより y がどのように変化していくかに、関数の関係が明確に現れるからです。 y のように注意して、変数の間の関係を探ることになります。

例えば理科などで、「進む距離は時間の関数だ」と表現する場合は、距離の数値が時間の数値によって決まるという状況、時間に伴って距離が変化するという状況や、距離が時間に依存しているという関係を強調した表現になっています。

変量から変数へ

中学校で、変量への着目から変数への着目へと転換することには、どのような利点があるのでしょうか。

変量の数値は 7 cm や 51.6 cm などいろいろです。いろいろな長さの場合があるので、数値の部分に文字を用いて x cm と表せば、この x は変数になっていると考えることができます。重さの方もいろいろな重さがある場合に、同様に y g と表したとき、数値の部分の y も変数です。

つまり数値の部分に着目すると、変数の関係は変化する数値の関係、変数の関係ですから、なんらかの関数と考えることができます。

もしもこの関数について、すでにいろいろ探求してあり、この関数について私たちはいろいろなことを知っているとしたらどうでしょう。それらの知見を、針金の長さとう重さの関係にあてはめることができます。そして、関数についての知見に基づいて、針金の長さとう重さの関係についての情報を得ることができます。つまり、関数の知見を針金の場面に応用することができます。

同じように、ある場面に現れる変量の数値の間に、ある種の関数と考えることのできる関係があるならば、その関数についての知見をその場面に応用するこ

とができ、それらの変量についての情報を得ることができます。

中学校から高等学校、大学へと数学の学習を進める中で、たくさんの種類の関数が出てきます。そしてそれらの関数について探求し、それらの関数についての知見が少しずつ積み重ねられていきます。関数の種類が増えるということは、より多くの場面を関数という視点で探求することができるようになる、ということです。また関数の知見が積み重ねられていくということは、その場面についてより豊かな情報が得られるようになる、ということです。

このように、より多くの場面に関数という考え方を役立てることを目指し、数学の学習では、関数の種類を増やしていくとともに、それらの関数について探求し、関数に関わる知見を豊かにしていこうとしているのです。

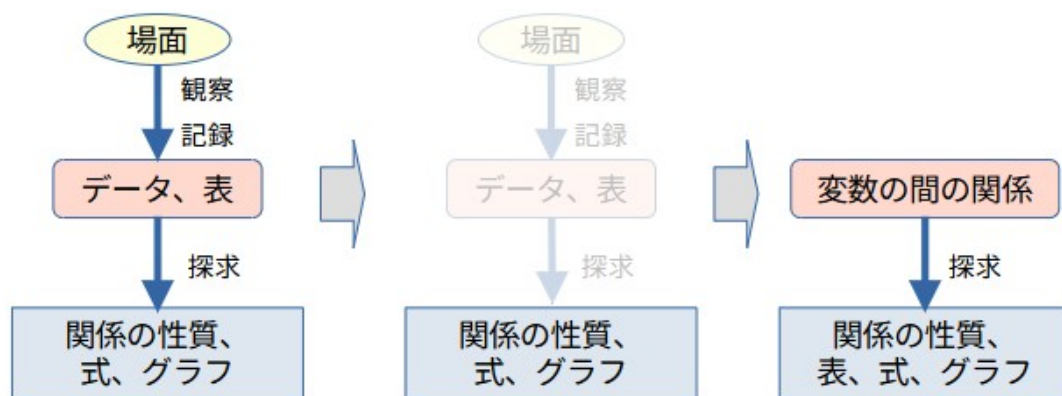
変化と対応の逆転

関数とは何か、いまひとつピンとこないかもしれません。しかし中学校で場面の探求から関係への探求へと転換するためには、上のような関数という考えがどうしても必要になるのです。

算数では、場面で観察される変量の関係を探求しました。まずは水そうに水を入れる場面などを観察し、1分後、2分後、3分後、…のときの水の深さを順に記録していきます。こうして得られたデータは表に整理されました。教科書では最初から表が示されていたかもしれませんが、本来であれば、表の前には場면을観察し、データを記録する作業があったはずです。こうして得られた表をもとに、時間と水の深さの関係を探求することになります(次ページの図の左側)。

つまり、場面の中の変化のようすをくわしく調べるために、各時点での水の深さを記録するといったように、まずは変化が先にあり、そこから表に整理されるような対応の関係を作り出していました。スポーツなどで、動いているようすを連続写真に記録するようなイメージです。

しかし中学校では、場面の探求から関係の探求へと転換するのです。そのとき、算数で考えたような探求する場面はなくなります(次ページの真ん中の図)。量を記録した表もなくなります。その代わりに、変数の間の関係についての説明が探求の出発点になります(右側の図)。



算数では、場面に見られる量の変化を観察し、データを表の形に整理して、量との関係を調べました。中学校では、変数間の関係の基本的な性質が最初に説明され、そこから探求が始まります。関係の説明から表を作ったり、関係の説明からほかにわかることがないかを探ったりします。いわば、場面の観察の代わりに、関係の観察を行うのです。

そうした関係の観察の一部として、変化の観察もあります。

関数は、2つの変数の間の関係ですから、そのままでは水そうの場面のような変化は感じられません。しかし、 x の値をいろいろに変化させることを考えると、それに対応して y の値も変わっていきます。例えば x の値を0.1ずつ増やすと、それに対応して y の値も変わります。このように自分で動かしてみることで、関数にも変化が生まれます。

つまり関数では、対応の関係から変化が生まれます。水そうの場面の探求が、連続写真のように、変化しているものを瞬間瞬間を切り取るのだとすれば、関数の探求は、コマ撮りアニメーションのように、各瞬間の状態をつなぎ合わせることで変化を作り出すことになります。

このとき、 x の値を少しずつ増やすと y の値はどのように変化するかとか、 x の値をどんどん大きくしていくと y の値がどのように変化するかといったことも、関数の大切な性質になってきます。（参考：関数としての比例・反比例の探求）

対応の決め方

場面の中の変量を観察しているとき、一方の量の値に対応して他方の量の値が決まることは、場面の中で自然に起こっています。私たちはそのようすを記録

し、整理すればよいだけです。場面がなく、単に変数の間の対応を考えている場合は、そうした現象が自然には生じていません。ただ、一方の変数 x の値から対応する変数 y の値を決める手続きやきまりがはっきりしていれば、 x のどの値に対しても y の値をただ一つ決めることはできます。

数学の学習でも、新たな場面をもとに対応のきまりを作ることがあります。しかし、もう一方の変数の値を決める手続きやきまりを適当に設定することで、新しく関数を作る場合もあります。

例1：ライトの点滅

ある時間の間隔でついたり消えたりしているライトを考えます。観察したところ、0.8秒間消えた後で、0.2秒間点灯していたとします。

このとき、消えている状態を0という値で表し、点灯している状態を1という値で表すとします。スイッチを入れてからの時間を x 秒と表し、点灯しているか消えているかの状態を y と表すと、

それぞれの x の値を決めたとき、対応して y の値も右のように0か1のどちらか一つに決めることができ

$$x \text{ の値の } \left\{ \begin{array}{l} 0.8 \text{ 未満なら } y \text{ の値は } 0 \\ 0.8 \text{ 以上なら } y \text{ の値は } 1 \end{array} \right.$$

ます。

したがって、変数 x と y の関係は関数になります。また、そのグラフをかくこともできます。（参考：ライトの点滅とグラフによる表現）

ここまでは、ライトの場면을観察して、時間とライトの状態との関係から対応のきまりを決めているのですが、場面のことを忘れて、右上のように、どのような x の値に対して0と1を対応させるのかの手順だけを決めても、同じ対応の関係を表現することができます。

関数の学習では、もともと何か場面があったかもしれないとしても、とりあえずその場面のことは忘れて、値を対応させるきまりから出発することがよくあります。 x が経過時間の値だと思えば、負の数にしてよいのかとか、何兆という大きな数にしたらライトが切れてしまうのではと心配になります。しかし場面を忘れて x を単なる変数と思えば、どんな値を代入しても安心です。また、上の0.8

の部分で 0.6 や 0.1 に変えることも、そのようなライトが本当にあるのかを心配をせずに、自由に行うことができます。

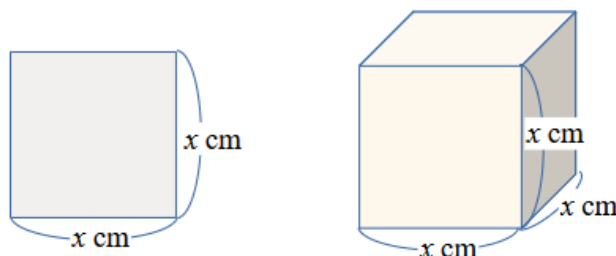
さらに、上の対応の手順を参考に考えると、 x の値を決めたときの対応する y の値として次のような決め方を考えることができます。

- ・ y の値を x の値の整数部分として決める
- ・ y の値を x の値の小数部分として決める
- ・ y の値を x の値の絶対値として決める

そしてこれらの決め方に基づいて、それぞれ関数を作ることができます。変量の値がそのようになる場面があるかどうかはわかりませんが、対応の仕方を決めることができるので、関数として考えることができるのです。

例 2：面積と体積

変数 x を用いて x cm という長さを考えます。 x の値を一つ決めるとき $x \times x (=x^2)$ は 1 辺の長さが x cm の正方形の面積を表しました。また $x \times x \times x (=x^3)$ は 1 辺の長さが x cm の立方体の体積を表しました。



では、 $x \times x \times x \times x (=x^4)$ の値は何を表すでしょうか。また $x \times x \times x \times x \times x (=x^5)$ の値はどうでしょう。すぐにはどのような場面かは思いつかないかもしれませんが、 x の値を一つ決めるとき $x \times x \times x \times x$ の値も $x \times x \times x \times x \times x$ の値もただ一つ決めることができるので、 x と $x \times x \times x \times x$ の関係も x と $x \times x \times x \times x \times x$ の関係も関数です。

さらに $x \times x$ と $x \times x \times x$ と 3 をたした値 $x \times x + x \times x \times x + 3 (=x^2 + x^3 + 3)$ はどうでしょう。面積と体積と 3 をたした値なので、どのような場面で現れる量なのかはわかりませんが、それでも、 x の値を一つ決めるときその値をただ一つ決めることができるので、 x と $x \times x + x \times x \times x + 3$ の関係も関数になります。

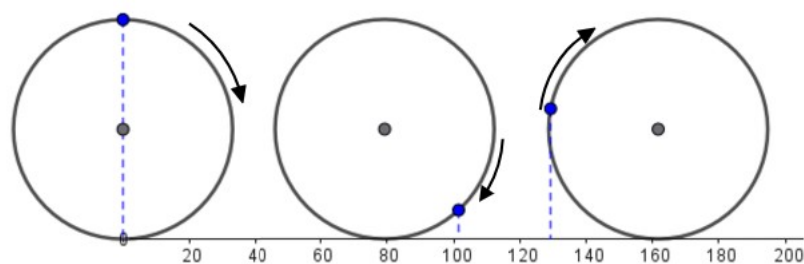
このようにもう一方の変数の値を決める手順を式で表現すると、いろいろな

関数を作ることができます。そうした関係が現れるような場面があるのかどうかはわかりませんが、対応の仕方を決めることができるので、関数として考えることができるのです。

これまで算数では扱われなかったような場面から、新たな関数が生まれる場合もあります。

例3：回転するタイヤ

自転車のタイヤで、下図の左のように、青い点のところにシールをつけたとします。タイヤが回転するとこのシールも、真ん中や右の図のように一緒に回転します。（参考：タイヤと青い点の回転する様子）



このとき、自転車の進んだ距離を x cm、シールの地面からの高さ(図の青い点線の長さ)を y cm と表します。 x の値を一つ決めたとき、その時点での青い線の長さを測れば、対応して y の値をただ一つ決めることができます。ですから、 x と y の関係は関数です。

進んだ距離はどんどん増えますが、高さは増えたり減ったりします。そして、タイヤは回転するので、同じような変化を繰り返します。またよく観察すると、高さがぐいっとすばやく変わる部分と、ゆるやかに変わる部分があるようです。

このような回転の中にある変数の関係は算数では扱われませんでしたが、数学では、回転の中に見られる関係から生まれる関数は、重要な役割を果たしています。また同じような変化を繰り返す関数は、周期を持つということから周期関数(periodic function)と呼ばれます。

その場合も、回転の場面を探求するというよりも、そこから生まれた関係、つまり関数を探求し、その性質や他の関数との関係についてわかることを探ることになります。

例4：停まっている自動車

今から経過した時間を x 秒で表し、今いる場所から移動した距離を y m で表すことにします。あなたの前に自動車が停車しています。そしてずっと停まったままです。このとき、 x の値を決めたら、それに対応する y の値をただ一つ決めることはできるでしょうか。

時間は経過しますから、 x の値はどんどん変わっていきます。しかし自動車は停まっていますから、進んだ距離はずっと 0 m です。つまり y の値は x の値にともなって変化していません。算数で考えたような、ともなって変わる量にはなっていないのです。

しかし、どの x の値についても、対応する y の値として 0 を決めることができます。ですから、変数 x と y の関係は関数であると考えられます。

このような関数は、どのような x の値についても一つの定まった y の値になるので、定数関数(constant function)と呼ばれています。どの x の値についても対応する y の値を 29 と決めることにしても定数関数になりますし、 y の値を -3.7 と決めることにしても定数関数になります。

動いているものの連続写真を撮る場合は、実際の動きの記録しか作れません。しかしコマ撮りアニメーションであれば、実際は難しい動きやありえない動きも作り出すことが、比較的容易にできるでしょう。同じように、変数の関係はわりと常識的なものになりがちですが、対応をもとに関数を作る場合は、もっと自由に変数間の関係を作り出すことが可能になります。

関数としての比例・反比例

算数ではいろいろな場면을観察し、その中のともなって変わる2つの変数を探求して、それらの間の関係が「比例」とか「反比例」という性質を持つことを学習しました。針金の場面であれば、その長さと言重さという2つの変数の間の関係は、「比例」という性質を持っていました。面積が 24 cm^2 の長方形をいろいろ作ると、その縦の長さと横の長さの関係は、「反比例」という性質を持っていました。

中学校1年生で学習するのは、比例という関係や反比例という関係がどのような性質を持っているかであり、またそうした関係をどのように探求するかと

いう方法です。

2つの変数の間の関係を探求するので、その関係が学習の出発点になります。「何を探求するのか」を明確にするために、これから調べようとする関係を、次のような性質を持った関係としてまず規定します。

- (1) 2つの変数 x と y の間の関係が関数になっている。すなわち、 x の値を一つ決めるとそれに対応して y の値をただ一つ決めることができる。
- (2) x の値に対応して y の値を決めるための手順やきまりが、0でないある数 a を用いて

$$y=ax$$

と表すことができる。

算数では、場面の中の変数の関係を調べて、その関係を「 y =きまった数 $\times x$ 」と表しましたが、数学では y の値を決めるための上の式は、探求の出発点となります。上の式を調べたり、式に値を代入して自分で表を作り、その表を調べたりして、上の関係が持つ性質を調べることになります。

同じように、中学校1年生で学習する反比例は、次のような性質を持った2変数の間の関係として規定します。

- (1) 2つの変数 x と y の間の関係が関数になっている。すなわち、 x の値を一つ決めるとそれに対応して y の値をただ一つ決めることができる。
- (2) x の値に対応して y の値を決めるための手順やきまりが、0でないある数 a を用いて

$$y=\frac{a}{x}$$

と表すことができる。

なお、上の式の分母は0になることはできませんから、変数 x の変域は0をのぞくすべての数となります。逆に分母の x には0以外のどんな数でも代入することができます。つまり分母は3とか17といった正の整数だけでなく、-6や-36といった負の数、2.7や0.04といった小数、さらには $\frac{2}{5}$ や $\frac{11}{7}$ といった分数を代入することもできます。（参考：分数のとらえ直し）

上の式 $y=ax$ の a のことを比例定数と呼びます。 x の値に対応して y の値を決める手順を決定する、とても重要な数です。この a の値を決めるとその手順も決まるので、探求する比例自体を決める数だと言えるでしょう。

式 $y=\frac{a}{x}$ の a は“反比例定数”と呼びたくなりますが、実はこちらの a も比例定数と呼びます。反比例は、「 x の逆数と y の関係」が比例になっている関係だと考えるからです。

比例の式 $y=ax$ や反比例の式 $y=\frac{a}{x}$ で、 x の値として負の数も代入できるのはどのような場面なのか、気になるかもしれません。あるいは、比例定数 a が負の値になるのはどのような場面なんだろうと、気になるかもしれません。

しかしここまで見てきたように、中学校の学習では場面のことは必ずしも考えずに、2つの変数の間の関係を探求することにしていました。したがって、 x の値を一つ決めるとそれに対応して y の値をただ一つ決めることができるのであれば、それらの値が正の数であるか負の数であるかを気にせず、まずは、それがどのような関係であるか、その関係はどのような性質を持っていそうかを考えてみてください。

算数の比例・反比例との違い

算数では比例を次のような場合として規定しました：「ともなって変わる2つの量 x と y があって、 x が2倍、3倍、…となると、 y も2倍、3倍、…になるとき、 y は x に比例するといいます」。

中学校では、場面の中の変量ではなく、変数の間の関係を探求するとしても、比例の説明は算数と同じでよいようにも思います。なぜ、規定の仕方を前の節で見たように変えるのでしょうか。

算数では場面についてのデータがたくさんあり、それを整理した表もありました。そして、場面の中のともなって変わる量に着目していたので、2つの量がどのようにともなって変化しているかを、表で調べることに重点がありました。そのときに重要な変化の仕方が、「 x が2倍、3倍、…となると、 y も2倍、3倍、…

になっている」という変化なのです。多くのデータが表に整理されていると、こうした変化をしているかは、チェックしやすいということもあります。つまり、データが満たすべき条件として、比例が規定されているのです。

これに対し中学校の数学では、変数 x と y の対応の關係に着目しています。しかも場面についてのデータがあるとは限らないので、 x の値に対応する y の値を決めるための手順やきまりにしたがって、 y の値を決めていく必要があります。そのため、比例もデータの満たす条件としてではなく、 y の値を決める手順やきまりの条件として規定する方が便利で、それが、上で見た「 $y=ax$ と表すことができる」という条件になります。

確かに、算数の規定の仕方であっても、 $x=1$ とか $x=2$ とかに対応する y の値がわかっていれば、他の x の値に対応する y の値を確かに決めることはできます。例えば $x=1$ に対応する y の値が 3 だとすれば、 $x=4$ に対応する y の値は 3 の 4 倍で 12 と決めることができます。

同じように、 $x=7.2$ であれば、 x の値が 1 から 7.2 に 7.2 倍になっているので、 y の値も 3 の 7.2 倍とすればよく、 $3 \times 7.2 = 21.6$ で 21.6 と決めることができます。 $x=13.8$ に対応する y の値は、3 の 13.8 倍ですから $3 \times 13.8 = 41.4$ で 41.4 と決めることができます。

このように算数の規定の仕方でも、 $x=1$ に対応する y の値がわかっていれば、それぞれの x の値に対応する y の値を決めることはできます。しかしそこでやっている計算をよく見ると、 3×4 、 3×7.2 、 3×13.8 、つまり「 $3 \times x$ の値」です。これは比例を規定する式 $y=ax$ で、 $a=3$ のときの場合 $y=3x$ になっています。

つまり算数のような規定の仕方でも、 y の値を決めようとする、 $y=3x$ といった決め方を表す式が必要になります。中学校ではデータのないところから出発するので、 x の値に対応する y の値を決める必要があり、 y の値を決めるには決める手順やきまりが必要です。そうであれば、その決め方の説明から出発するのが自然であり、ムダもないでしょう。それが、中学校での比例の規定の仕方ということです。

おわりに

算数では場面があったので考えやすかったのですが、中学校では、そうした場面がだんだんなくなり、式だけが出てくるようになるので、ともすると、何をやっているのかが見えづらいかもかもしれません。また「関係を探求する」と言われても、見えないものを探求するのでは、やはり考えづらいのも確かです。

それでも、中学校の関数を学習するためには、関係を探求することになれることも必要です。そのためには、ここまで見てきた「転換」に乗って、「今考えているのはどんな関係？」「その関係はどんな性質を持っている？」といった問いを持ちながら学ぶことがたいせつです。また、関係を見やすくするために、変数 x にいろいろな値を代入し、自分でデータを生み出し、自分で表を作ってしまうのも効果的です。「関係」の手ざわりができてくると、関数の学習もぐっと楽になることでしょう。

場面がなくてもよいということは、逆に言えば、場面の制約を受けず、自由にイメージをふくらませることができるということでした。変数や比例定数に“変な”数を代入して、どのようになるのかを楽しんでみるのもよいでしょう。式をいろいろに変えて、関数を自分で作ってみるのもよいでしょう。そうして調べたことが、あとになって何かの場면을考察するのに役立つことがあるかもしれません。

このようにして関数の世界を広げたり、関数についての知見を積み重ねたりして、いろいろな場면을調べる手だてを豊かする方法を学ぶのが、中学校の関数の学習だと言えるでしょう。

おまけ：関数としての比例・反比例の探求

ここまで見てきたように、中学校の数学では、場面のデータから出発する代わりに、それぞれの x の値に対応する y の値を決めるきまりから出発します。このきまりが2つの変数 x と y の関係、つまり関数を規定するので、このきまりからわかることが関数の性質ということになります。

比例の場合はこのきまりは $y=ax$ という式で与えられ、反比例の場合は $y=\frac{a}{x}$ という式で与えられていました。したがって、比例や反比例の性質は、この式を探求することで見出されるはずです。

式から直接見いだすのが中学生には少しむずかしい場合もあり、教科書では、式から一度、表を作り、表を観察することで性質を見いだすことも多くあります。それにより、表を探求するという、算数と同じ方法を用いることができるようになります。

しかしせっかくですから、ここではそうした性質が、式からも直接、見いだすことができることを確認しておくことにします。なお、以下で比例定数が a のままだと考えにくい場合は、 a に2とか3といった数を代入して考えてみてください。

(1) 比例定数の性質

比例では、 x と y の商 $\frac{y}{x}$ は一定になる、という性質がありました。

比例を規定する式は $y=ax$ でした。ここで x の値が0でない場合には、式の両辺を x で割ることができます。すると次のようになります： $\frac{y}{x}=a$ 。これは、商 $\frac{y}{x}$ が常に a という値になることを表していますが、 a は定数でしたから、結局、商も定数になること、つまり一定になることを表しています。

反比例では、 x と y の積 xy は一定になる、という性質がありました。

反比例を規定する式は $y=\frac{a}{x}$ でした。ここで式の両辺に x をかけると、次のようになります： $y \times x = a$ 。これは、積 xy が常に a という値になることを表しています。

が、 a は定数でしたから、結局、積も定数になること、つまり一定になることを表しています。

なお、反比例では x の値は 0 をのぞくすべての数でした。したがって、上で両辺に x をかけるときの x や $xy=a$ のときの x も、 0 ではないことになります。

(2) x の値が 2 倍、3 倍、…になったときの y の値の変化

x の異なる 2 つの値を表すために、 x_1 と x_2 という書き方をします。同様に、 y の異なる 2 つの値を y_1 と y_2 と表すことにします。

比例では、 x の値が 2 倍、3 倍、…になると y の値も 2 倍、3 倍、…になる、という性質がありました。

比例を規定する式は $y=ax$ でした。今、 x の値 x_1 に対応する y の値が y_1 だとします。 $y_1=ax_1$ ということです。そして x の値が x_1 から x_2 に 2 倍になったとします。つまり $x_2=2x_1$ です。

x の値 x_2 に対応する y の値 y_2 を求めてみます。 $y=ax$ の x に x_2 を代入すればよいので、 $y_2=ax_2$ となるはずですが、ここで x_2 は $2x_1$ でしたから、 $y_2=ax_2=a(2x_1)=2(ax_1)=2y_1$ 。これは、 x の値を 2 倍にしたとき y の値も 2 倍になることを表しています。

今考えたことは、2 倍以外でも同じように考えることができます。ここから、 x の値が 2 倍、3 倍、…になると y の値も 2 倍、3 倍、…になる、という性質を、比例の式から見いだすことができます。

反比例では、 x の値が 2 倍、3 倍、…になると y の値は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、…になる、という性質がありました。

反比例を規定する式は $y=\frac{a}{x}$ でした。今、 x の値 x_1 に対応する y の値が y_1 だとします。 $y_1=\frac{a}{x_1}$ ということです。そして x の値が x_1 から x_2 に 2 倍になったとします。つまり $x_2=2x_1$ です。

x の値 x_2 に対応する y の値 y_2 を求めてみます。 $y=\frac{a}{x}$ の x に x_2 を代入すればよい

ので、 $y_2 = \frac{a}{x_2}$ となるはずです。ここで x_2 は $2x_1$ でしたから、 $y_2 = \frac{a}{x_2} = \frac{a}{2x_1} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{x_1} = \frac{1}{2} y_1$ 。これは、 x の値を 2 倍にしたとき y の値が $\frac{1}{2}$ 倍になることを表しています。

今考えたことは、2 倍以外でも同じように考えることができます。ここから、 x の値が 2 倍、3 倍、…になると y の値は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、…になる、という性質を、反比例の式から見出すことができます。

(3) x の値が 1 増えると y はいつも a だけ増える

比例を規定する式は $y = ax$ でした。今、 $y_1 = ax_1$ とします。つまり、 x の値 x_1 に対応する y の値が y_1 だとします。

x の値が x_1 から 1 だけ増えて $x_2 = x_1 + 1$ になったとします。そのときの y の値 y_2 を求めると次のようになります： $y_2 = ax_2 = a(x_1 + 1) = ax_1 + a = y_1 + a$ 。 a は定数ですからいつでも同じ値になります。つまり、 x の値が 1 増えると y はいつも a だけ増えることを、比例の式から見いだすことができます。

なお同じように考えると、 x の値が 2 つの値 x_1 と x_2 をたした値である場合についても、わかることがあります(ここでの x_1 と x_2 は前の段落の x_1 と x_2 とは特に関係はなく、単に 2 つの値を表すと考えてください)。

算数で学習した計算のきまりを思い出すと、 $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2$ となります。これは、比例では x の値 $x_1 + x_2$ に対応する y の値は、 x の値 x_1 に対応する y の値と x の値 x_2 に対応する y の値をたしたものになる、ということを示しています。

例えば、 $x = 7$ に対応する y の値は、 $x = 3$ に対応する y の値と $x = 4$ に対応する y の値をたした値になります。また $x = 5$ に対応する y の値と $x = 2$ に対応する y の値をたした値と考えても同じです。小学校 2 年生のときに、同じことを九九表からわかることとして学習しています。

なお反比例はこの性質を持っていません。

反比例を規定する式は $y = \frac{a}{x}$ でしたから、 x の値が x_1 から 1 だけ増えて $x_2 = x_1 + 1$

になったときの y の値 y_2 は次のようになります： $y_2 = \frac{a}{x_1+1}$ 。これと $y_1 = \frac{a}{x_1}$ との差

を考えてみます。すると、 $y_2 - y_1 = \frac{a}{x_1+1} - \frac{a}{x_1} = \frac{ax_1}{x_1(x_1+1)} - \frac{a(x_1+1)}{x_1(x_1+1)} = \frac{-a}{x_1(x_1+1)}$ となります。この差の値は x_1 の値により異なりますから、いつも同じ数ずつ変化するのではない、ということがわかります。

逆に言えば、 x の値が 1 だけ増えたときの y の値の変化の仕方が、 $x_1(x_1+1)$ の値で $-a$ を割った大きさになること、したがって x_1 の値が大きくなると変化の仕方が小さくなることなどは、反比例という関数の性質だということになります。

(2)で確認した「比例では x の値が 2 倍、3 倍、…になると y の値も 2 倍、3 倍、…になる」という性質と、ここで確認した「比例では x の値 x_1+x_2 に対応する y の値は、 x_1 に対応する y の値と x_2 に対応する y の値をたしたものになる」という性質をあわせ持つ状態は、「線形性 (linearity)」と呼ばれ、数学ではたいせつな性質とされています。

(4) 比例のグラフは原点を通る

グラフの直線は点の集まりです。そして各点は、ある x の値とそれに対応して決めた y の値とのペアを表しています。(参考：[グラフが決まると対応が決まる](#))

比例を規定する式は $y=ax$ でした。今、 x の値 0 に対応する y の値を求めると、 $y=ax$ の x に 0 を代入するので、次のようになります： $a \times 0 = 0$ 。何に 0 をかけても 0 になりますから、 x の値 0 に対応する y の値を 0 と決めることができるは、 a の値によらず、いつでも言えることです。

したがって、比例のグラフでは、 $x=0$ のときの点の y 座標は、いつでも 0 になることがわかります。つまり点 $(0, 0)$ は a の値によらず、比例のグラフを構成する点になっています。

[前に説明したように](#)、関数を規定する対応をもとに“変化”を考えることができます。 x の値を -1 から 1 まで少しずつ変化させると、それにもなって y の値も変化します。そして、 $x=0$ となったとき、 y の値も 0 となり、グラフは原点を“通過する”と見ることもできます。これが「比例のグラフは原点を通る」と

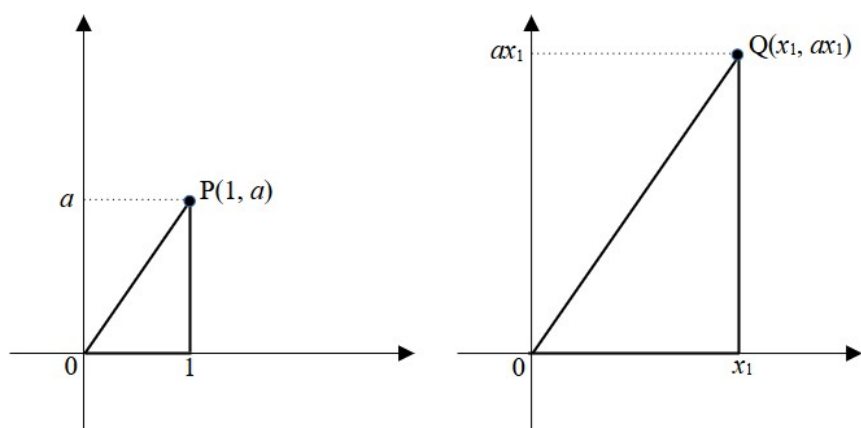
いう性質になります。

比例という関数の性質として考えると、 $x=0$ に対応する y の値は a の値がいくつであっても必ず0になる、という性質になります。あたりまえのようですが、「 x の値が0倍になると y の値も0倍になる」ととらえなおすと、「 x の値が2倍、3倍、…になると y の値も2倍、3倍、…になる」という性質の一部であると、見ることもでき、この性質が成り立つためのたいせつな情報とも言えます。

(5) 比例のグラフは直線になる

比例を規定する式は $y=ax$ でしたから、 $x=1$ に対応する y の値は a となります。したがって、座標が $(1, a)$ の点は、この比例のグラフを構成する点になっています。また(4)で見いだしたことから、原点 $(0, 0)$ はどのような比例についても、そのグラフを構成する点になっていることがわかります。

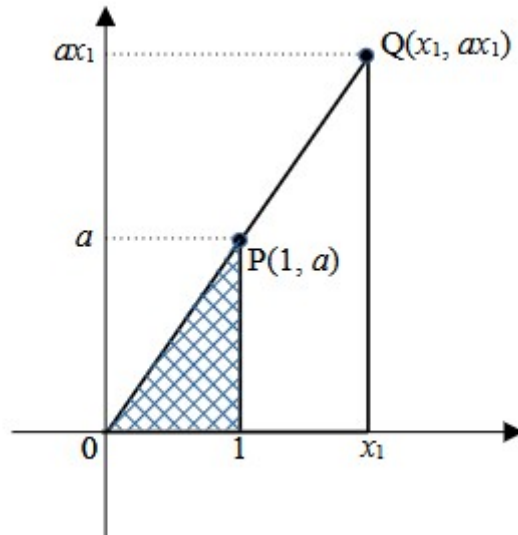
今、 x の値 x_1 に対応する y の値が y_1 だとします。つまり、 $y_1=ax_1$ とします。そして、下のような2つの三角形を考えてみます。



2つの直角三角形で、直角をはさむ辺のうち、水平の辺は長さが1から x_1 に x_1 倍になっています。また垂直の辺も長さが a から ax_1 にやはり x_1 倍になっています。小学校6年生のときに学習した拡大図・縮図のことを思い出すと、右の三角形は左の三角形を拡大した三角形になっています。ですから、右の三角形の原点のところの角の大きさは、左の三角形の原点のところの角の大きさと等しくなっています。

ここから、2つの三角形の斜めの辺の傾き方は等しいことがわかります。

つまり、 x の値 x_1 に対応する y の値が y_1 であることを表す点 $Q(x_1, ax_1)$ は、原点と点 $P(1, a)$ を結んだ線分を延長した直線の上ののっていることになります。



上の図では x_1 が 1 より大きい場合を確認していますが、 x_1 が 0 と 1 の間のときは、上の青い三角形の縮図ができます。また x_1 が負の数のおときは、三角形の向きは逆になりますが、やはり青い三角形の拡大図か縮図になります。したがって、そうした x_1 についても、点 $Q(x_1, ax_1)$ は、原点と点 P を結んだ線分を延長した直線の上ののっています。

このように、比例の場合は、 x と y の対応の関係を表す点が、すべて原点と点 P を結んだ線分を延長した直線の上ののっていることになります。そして、こうした点をすべて集めたのが比例のグラフでしたから、結局、この直線が比例のグラフになっていることがわかります。

比例を規定する式 $y=ax$ のおかげで、 $x=x_1$ のときの三角形は、必ず $x=1$ のときの三角形を x_1 倍に拡大か縮小した三角形になり、斜めの辺の傾きは必ず等しくなるのです。

逆に言えば、比例のグラフが原点を通る直線になっているということは、 x の値を x_1 倍にすると y の値も x_1 倍になるという性質を表しています。また直線であることから、 x の値を変化させたときに、 y の値がいつでも「同じように」変化するという性質を持つこともわかります。グラフがまっすぐな直線になっているという形の特徴から、(3)で見いだした性質に気づくこともできます。

この性質は、日常の場面などを観察した際に、そこで観察された2つの量が比例の関係になっているのかを、見いだすのに役立ちます。観察して集めたデータをグラフ用紙などに点で表したときに、その点の並び方が原点を通る直線に似ていれば、比例の関係になっている可能性が高いとわかります。逆に、原点を通りそうもないとか、直線とはかなり異なる形になっているといった場合は、比例の関係になっていない可能性が高いので、ほかの関係がないかを探ることになります。

このように、関数のグラフがどのような形状になるのかの知見は、関数の性質を表しているだけでなく、その関数が今調べている場面に適用できるかを判断するためにも役立ちます。