

分配法則でまとめる文字式の計算

文字式を学習するには、いくつかのコツがあります。その一つが、すぐに計算を始めるのではなく、常に式を観察してその構造に着目し、構造からわかることを考えたり、構造にふさわしい変形をしたりする、ということです。

その変形は、基本的には3つの計算法則にもとづいています。つまり、交換法則、結合法則、分配法則が、文字式を変形するときの基本となります。

そこでここでは、特に中心的な役割をはたす分配法則を中心にして、中学校で学習する文字式の計算を見直してみます。

1. 分配法則

3つの計算法則は、小学校の算数でも「計算のきまり」として、すでに出てきていました。分配法則も、小学校4年生のときに、次のように学習しています。

$$(\square + \triangle) \times \bigcirc = \square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$$

$$(\square - \triangle) \times \bigcirc = \square \times \bigcirc - \triangle \times \bigcirc$$

ここで一つ注意することは、上の式の等号「=」は、左側の式(左辺)と右側の式(右辺)が等しいことを表している、ということです。等号をはさんだ二つの式は等しいので、一方の式をもう一方の式で置きかえることができます。

したがって、 $(\square + \triangle) \times \bigcirc$ を $\square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$ に置きかえることができるだけでなく、逆に、 $\square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$ を $(\square + \triangle) \times \bigcirc$ に置きかえることもできます。また、かけ算についての交換法則を用いると、 $(\square + \triangle) \times \bigcirc = \bigcirc \times (\square + \triangle)$ や $\square \times \bigcirc = \bigcirc \times \square$ 、 $\triangle \times \bigcirc = \bigcirc \times \triangle$ となりますから、上の式は、次のことも表しています。

$$\bigcirc \times (\square + \triangle) = \bigcirc \times \square + \bigcirc \times \triangle$$

$$\bigcirc \times (\square - \triangle) = \bigcirc \times \square - \bigcirc \times \triangle$$

また、算数では \square 、 \triangle 、 \bigcirc は数でしたが、数学ではここに数だけでなく文字式も入ります。したがって、 \square が $3x$ という場合もあれば、 \triangle が $7a-2b$ という場合もあります。ただその場合も特におそれる必要はなく、まずは、上の分配法則の中にある \square や \triangle にそれらの式を形式的にあてはめてみればよいのです。

以下では、中学校で学習した文字式の計算の多くが、分配法則をもとに行われていることを見ていきます。

2. 第1学年で学習する計算

第1学年では、1種類の文字を含む式の計算を学習します。

(1) 多項式どうしの加法・減法

$2a+5a$ は、 $2\times a+5\times a$ と見ると、 $\square\times\bigcirc+\triangle\times\bigcirc$ の形になっています。そこで、 \bigcirc でくくることができて、 $(\square+\triangle)\times\bigcirc$ の形に直せます。

$$2a+5a=2\times a+5\times a=(2+5)\times a=7\times a=7a$$

なお $2a$ と 3 では共通する文字がないので、 $\square\times\bigcirc+\triangle\times\bigcirc$ の形と見ることはむずかしいです。ですから、 $2a+3$ ならとりあえずこのまま残しておきます。

a と $5a$ だと、 $(\square+\triangle)\times\bigcirc$ の形に直せないように見えます。この場合は、 $a=1\times a$ と考えると $a+5a=1\times a+5\times a=(1+5)\times a$ と分配法則が使えるようになります。

同様に、 $-a$ と $5a$ なら $-a=(-1)\times a$ と考えて、 $-a+5a=(-1)\times a+5\times a=(-1+5)\times a$ として分配法則を用います。

$2a+3$ と $7a+5$ をたす場合、つまり $(2a+3)+(7a+5)$ といったたし算では、分配法則が使えるような項を集めて計算をします。 $2a$ と $7a$ なら $(\square+\triangle)\times\bigcirc$ の形に直せそうなので、これをまず集めて、上と同じように計算します。

$$(2a+3)+(7a+5)=2a+7a+3+5=(2+7)\times a+(3+5)=9a+8$$

分配法則はひき算でも成り立ちますから、 $2a+3$ から $7a+5$ をひく場合も、たし算のときと同様に計算ができます。

$$(2a+3)-(7a+5)=2a+3-7a-5=2a-7a+3-5=(2-7)\times a+(3-5)=-5a-2$$

もしも $-(7a+5)$ を $-7a-5$ に直す部分が心配であれば、 $-a=(-1)\times a$ と考えたのと同様に、 $-(7a+5)=(-1)\times(7a+5)$ と考えて分配法則を用いると確認ができます。

$$-(7a+5)=(-1)\times(7a+5)=(-1)\times 7a+(-1)\times 5=-7a+(-5)=-7a-5$$

$-(7a-5)$ であれば

$$-(7a-5)=(-1)\times(7a-5)=(-1)\times 7a-(-1)\times 5=-7a-(-5)=-7a+5$$

と分配法則を用いて確かめることができます。

(2) 数と多項式の乗法

$5(x+4)$ であれば、 $5 \times (x+4)$ と考えると分配法則を用いれば計算できます。

$$5(x+4) = 5 \times (x+4) = 5 \times x + 5 \times 4 = 5x + 20$$

なお分数の形をした $\frac{7x+3}{4}$ といった式は、 $(7x+3) \div 4 = (7x+3) \times \frac{1}{4}$ と考えると

分配法則を用いて考えることができます。

$$\frac{7x+3}{4} = (7x+3) \times \frac{1}{4} = 7x \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{7x}{4} + \frac{3}{4}$$

$\frac{2x+6}{5} \times 3$ のように分数の形の式にさらに数をかけている式なら、分数の形の部分を上のようにとらえ直し、さらにそこに数をかけていると考えればよいでしょう。

$$\frac{2x+6}{5} \times 3 = (2x+6) \times \frac{1}{5} \times 3$$

分配法則を思い出すと、 $(2x+6) \times \frac{1}{5}$ を上のように計算してから、そこに3をかけてもよいですし、まずは $\frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}$ と計算してから、 $(2x+6) \times \frac{3}{5}$ を計算してもよいでしょう。

3. 第2学年で学習する計算

第2学年では、2種類の文字の入った式の計算を学習します。分配法則を用いるときのポイントは、異なる文字については $(\square + \triangle) \times \bigcirc = \square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$ の \bigcirc としては使えないので、別々に考えるということです。

(1) 式どうしの加法・減法

$(3x-2y) + (-5x+4y)$ のように2種類の文字の入った式をたす場合、 $3x-2y$ の部分は $3 \times x - 2 \times y$ となっていて分配法則が使えませんから、 x の項と y の項は別々に考えます。それ以外は、第1学年の計算と同じように、同類項をまとめ、分配法則を用います。

なお係数が負の数の場合は、 $-2y = (-2) \times y$ や $-5x = (-5) \times x$ ととらえ直すと、分配法則が使いやすくなります。

$$\begin{aligned}
(3x-2y)+(-5x+4y) &= 3x+(-2y)+(-5x)+4y \\
&= 3\times x+(-2)\times y+(-5)\times x+4\times y \\
&= 3\times x+(-5)\times x+(-2)\times y+4\times y \\
&= (3+(-5))\times x+((-2)+4)\times y \\
&= (-2)\times x+2\times y \\
&= -2x+2y
\end{aligned}$$

分配法則はひき算でも成り立ちますから、 $3x-2y$ から $-5x+4y$ をひく場合も、たし算のときと同様に計算ができます。

$$\begin{aligned}
(3x-2y)-(-5x+4y) &= 3x+(-2y)-(-5x)-4y \\
&= 3\times x+(-2)\times y-(-5)\times x-4\times y \\
&= 3\times x-(-5)\times x+(-2)\times y-4\times y \\
&= (3-(-5))\times x+((-2)-4)\times y \\
&= 8\times x+(-6)\times y \\
&= 8x+(-6y)=8x-6y
\end{aligned}$$

なお $-(-5x+4y)=-(-5x)-4y$ の部分が心配な時は、分配法則を用いて、次のように確かめることができます。

$$-(-5x+4y)=(-1)\times(-5x+4y)=(-1)\times(-5x)+(-1)\times 4y=-(-5x)+(-4y)=-(-5x)-4y$$

(2) 数と多項式の乗法・除法

$3(2x+9y)$ のように式が $+$ や $-$ を含む場合、 $3\times(2x+9y)$ と見ることで、分配法則が使えることがわかります。

$$3(2x+9y)=3\times(2x+9y)=3\times 2x+3\times 9y=6x+27y$$

また式を数でわる除法では、逆数の乗法と読みかえることで、やはり分配法則を用いて変形することができます。

$$(2x+9y)\div 3=(2x+9y)\times\frac{1}{3}=2x\times\frac{1}{3}+9y\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}x+\frac{9}{3}y=\frac{2}{3}x+3y$$

もちろん、 $2\div 3=\frac{2}{3}$ や $a\div 3=\frac{a}{3}$ であったのと同じように考えると、

$$(2x+9y)\div 3=\frac{2x+9y}{3}$$

と変形してもよいでしょう。先ほどと少し形は異なりますが、一方を変形すればもう一方になることがわかります。

$6(x+4y)-2(5x-3y)$ のように、数と式をかけた式どうしを、たしたりひいたりする場合は、(2)と(1)の計算を組み合わせて行うことになります。

$$\begin{aligned}
 6(x+4y)-2(5x-3y) &= 6 \times (x+4y) - 2 \times (5x-3y) \\
 &= 6 \times (x+4y) + (-2) \times (5x-3y) \\
 &= 6 \times x + 6 \times 4y + (-2) \times 5x - (-2) \times 3y \\
 &= 6x + 24y + (-10x) - (-6y) \\
 &= 6 \times x + (-10) \times x + 24 \times y - (-6) \times y \\
 &= (6 + (-10)) \times x + (24 - (-6)) \times y \\
 &= (-4) \times x + 30 \times y \\
 &= -4x + 30y
 \end{aligned}$$

【補足】

第2学年では $5a \times 6b$ や $(-4xy) \times 7y$ のような文字式と文字式の乗法も学習します。この乗法を計算する際は、分配法則よりも交換法則を利用して、数や文字の順序を入れかえて変形することになります。

$$\begin{aligned}
 5a \times 6b &= 5 \times a \times 6 \times b & (-4xy) \times 7y &= (-4) \times x \times y \times 7 \times y \\
 &= 5 \times 6 \times a \times b & &= (-4) \times 7 \times x \times y \times y \\
 &= 30ab & &= -28xy^2
 \end{aligned}$$

また $12xy \div 4y$ や $(-6a^2) \div \frac{1}{3}a$ といった文字式を文字式でわる除法は、文字式を数でわる除法の場合と同じように考えればよいでしょう。

$$\begin{aligned}
 12xy \div 4y &= 12xy \times \frac{1}{4y} & (-6a^2) \div \frac{1}{3}a &= (-6a^2) \div \frac{a}{3} \\
 &= \frac{12xy}{4y} & &= (-6a^2) \times \frac{3}{a} \\
 &= 3x & &= \frac{(-6) \times a \times a \times 3}{a} \\
 & & &= (-18) \times a = -18a
 \end{aligned}$$

第2学年の学習では、第1学年のときには3や-2といった数だった部分も $3a$ や $-2x$ などと文字式になっています。しかし、 $3a$ や $-2x$ も1つの数と考えてよかったですから、基本的には第1学年の学習と同じような計算になります。

4. 第3学年で学習する計算

第2学年では $3(2x+9y)$ や $5a \times 6b$ といった計算を学習しましたが、第3学年では $3x(2x+9y)$ や、さらには $(5a+3)(6b-2)$ といった、より複雑な文字式の計算を扱います。

(1) 単項式と多項式の乗法・除法

単項式 $3x$ と多項式 $2x+9y$ の乗法は、 $3x$ も1つの数だと考えると、 $3(2x+9y)$ のような計算とまったく同じように、分配法則にしたがって行うことができます。

$$\begin{aligned} 3x(2x+9y) &= 3x \times (2x+9y) \\ &= 3x \times 2x + 3x \times 9y \\ &= 6x^2 + 27xy \end{aligned}$$

また、多項式 $6xy+4y^2$ を単項式 $2y$ でわる除法も、 $(6xy+4y^2) \div 2$ といった計算とまったく同じように、逆数をかける乗法と考えると、分配法則を用いることができます。

$$\begin{aligned} (6xy+4y^2) \div 2y &= (6xy+4y^2) \times \frac{1}{2y} \\ &= 6xy \times \frac{1}{2y} + 4y^2 \times \frac{1}{2y} \\ &= \frac{6xy}{2y} + \frac{4y^2}{2y} \\ &= 3x+2y \end{aligned}$$

【補足】

もしも $3x(2x+9y)$ のカッコの中が $2x+9y+5$ のように+が2つ入った式だったらどうしたらよいでしょう。分配法則では、このような場合は扱われていないように見えます。

しかしここで、+や-の入った式も1つの数だと考えればよいことを思い出します。例えば、 $2x+9y+5$ の $9y+5$ の部分も1つの数と考えることができます。そこで $2x+9y+5$ を $2x+(9y+5)$ のように考えて、カッコの中は $2x$ と $9y+5$ という2つ

の数をたした和だにとらえると、分配法則を使うことができますようになります。

$$\begin{aligned}3x(2x+9y+5) &= 3x \times (2x+(9y+5)) \\ &= 3x \times 2x + 3x \times (9y+5) \\ &= 3x \times 2x + 3x \times 9y + 3x \times 5\end{aligned}$$

最後の結果を見ると、かっこの中に+が2つある場合でも、+が1つの場合と同じように、分配法則が使えることもわかります。

(2) 多項式と多項式の乗法（式の展開）

$(3x-2)(-4x+5)$ のような多項式どうしの乗法でも、一方の式を1つの数だと考えることにより、分配法則を用いて計算を進めることができます。例えば、後ろの $-4x+5$ の方を1つの数と考えると、次のようになります。

$$\begin{aligned}(3x-2)(-4x+5) &= (3x-2) \times (-4x+5) \\ &= 3x \times (-4x+5) - 2 \times (-4x+5) \\ &= 3x \times (-4x+5) - 2 \times (-4x+5) \\ &= 3x \times (-4x+5) + (-2) \times (-4x+5) \\ &= 3x \times (-4x) + 3x \times 5 + (-2) \times (-4x) + (-2) \times 5 \\ &= (-12x^2 + 15x) + (8x - 10) \\ &= -12x^2 + 15x + 8x - 10 \\ &= -12x^2 + 23x - 10\end{aligned}$$

この計算の最初と最後に着目したのが、いろいろな乗法公式になります。ですから、公式を忘れたときや、どの公式が使えるのかよくわからないときも、分配法則を用いてていねいに計算をすれば、式を変形することはできます。

(3) 因数分解

因数分解は展開の乗法公式を逆に用いて、展開する前の形に戻します。ということは、因数分解は、分配法則の $\square \times \bigcirc + \triangle \times \bigcirc$ を $(\square + \triangle) \times \bigcirc$ に置きかえる方の変形を使う式の計算だと考えることができます。

例えば、 $2x+4$ であれば $2 \times x + 2 \times 2$ と捉えなおすと、 $2 \times x + 2 \times 2$ ですから、分配法則を用いて $2 \times x + 2 \times 2 = 2 \times (x+2) = 2(x+2)$ と因数分解することができます。また $x^2y + xy^2$ であれば $x \times x \times y + x \times y \times y = x \times y \times x + x \times y \times y = (x \times y) \times x + (x \times y) \times y$ と捉えなお

すと、 $(x \times y) \times x + (x \times y) \times y = (x \times y) \times (x + y) = xy(x + y)$ と因数分解することができます。

もう少し複雑な場合は、捉えなおしの仕方に工夫は必要となりますが、同じように分配法則を用いて考えることができます。

$$\begin{aligned}x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 2x + 3x + 6 \\ &= x(x + 2) + 3(x + 2) \\ &= x \times (x + 2) + 3 \times (x + 2) \\ &= (x + 3) \times (x + 2) \\ &= (x + 3)(x + 2)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}x^2 - 7x + 10 &= x^2 - 2x - 5x + 10 \\ &= x(x - 2) - 5(x - 2) \\ &= x \times (x - 2) - 5 \times (x - 2) \\ &= (x - 5) \times (x - 2) \\ &= (x - 3)(x - 2)\end{aligned}$$

ここで、 $5x$ や $-7x$ をどのように分解するかは、 6 や 10 を因数分解した $6 = 2 \times 3$ や $10 = 2 \times 5$ を手がかりに見つけることができます。

$x^2 - a^2$ の因数分解では、展開の中で消えてしまった項を復元する必要がありますが、それでも次のように分配法則を用いて因数分解することもできます。

$$\begin{aligned}x^2 - a^2 &= x^2 + xa - xa - a^2 \\ &= x(x + a) - a(x + a) \\ &= x \times (x + a) - a \times (x + a) \\ &= (x - a) \times (x + a) \\ &= (x - a)(x + a)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}16x^2 - 9y^2 &= (4x)^2 + 12xy - 12xy - (3y)^2 \\ &= 4x(4x + 3y) - 3y(4x + 3y) \\ &= 4x \times (4x + 3y) - 3y \times (4x + 3y) \\ &= (4x - 3y) \times (4x + 3y) \\ &= (4x - 3y)(4x + 3y)\end{aligned}$$

右の変形では、 $16x^2 = (4x)^2$ や $9y^2 = (3y)^2$ であることを手がかりとして、 $4x$ と $3y$ を見つけ、 $4x \times 3y = 12xy$ として $12xy$ を見つけています。

5. 高等学校で学習する計算

高等学校で出会う文字式の計算では、式の次数が3次や4次になったりしますが、基本的には中学校で学習した文字式の計算と同じように、分配法則を用いて考えていくことができます。

$$\begin{aligned}(x^2 + 2)(2x^2 + 3x - 4) &= (x^2 + 2) \times (2x^2 + 3x + (-4)) \\ &= (x^2 + 2) \times 2x^2 + (x^2 + 2) \times 3x + (x^2 + 2) \times (-4) \\ &= (x^2 + 2) \times 2x^2 + (x^2 + 2) \times 3x + (x^2 + 2) \times (-4) \\ &= x^2 \times 2x^2 + 2 \times 2x^2 + x^2 \times 3x + 2 \times 3x + x^2 \times (-4) + 2 \times (-4) \\ &= 2x^4 + 4x^2 + 3x^3 + 6x + (-4)x^2 + (-8) \\ &= 2x^4 + 3x^3 + 6x - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2 \times (a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2) \times (a+b) \\
&= a^2 \times (a+b) + 2ab \times (a+b) + b^2 \times (a+b) \\
&= a^2 \times (a+b) + 2ab \times (a+b) + b^2 \times (a+b) \\
&= a^2 \times a + a^2 \times b + 2ab \times a + 2ab \times b + b^2 \times a + b^2 \times b \\
&= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

【補足】

高等学校では多項式を多項式でわる除法も出てきます。例えば、

$$(x^2+5x-4) \div (x+2)$$

といった除法です。この場合も小学校で学習した $11 \div 4$ や中学校で学習した $(2x+9y) \div 3$ 、 $12xy \div 4y$ と同じように、

$$(x^2+5x-4) \div (x+2) = \frac{x^2+5x-4}{x+2}$$

と考えることができます。また同じことですが、 $x+2$ の“逆数”をかけると考えてから、分配法則を用いることもできます。

$$\begin{aligned}
(x^2+5x-4) \div (x+2) &= (x^2+5x-4) \times \frac{1}{x+2} \\
&= x^2 \times \frac{1}{x+2} + 5x \times \frac{1}{x+2} - 4 \times \frac{1}{x+2} \\
&= \frac{x^2}{x+2} + \frac{5x}{x+2} - \frac{4}{x+2}
\end{aligned}$$

算数では $11 \div 4 = \frac{11}{4}$ と表すほかに、 $11 \div 4$ を商2、余り3と表すこともありました。また $11 \div 4$ が商2、余り3であることを、 $11 = 4 \times 2 + 3$ と表したりもしました。文字式でもこれと同じように、

$$x^2+5x-4 = (x+2) \times Q + R$$

となるような式 Q を商、式 R を余りと呼ぶことができます。

今の式で $(x+2) \times Q$ の部分を展開すると $x^2 + \dots$ という形になることを考えると、 Q は数 a を用いて $x+a$ と書けそうです。 $(x+2) \times (x+a)$ を分配法則を用いて展開して

みると、次のようになります。

$$\begin{aligned}(x+2)\times(x+a) &= x\times(x+a)+2\times(x+a) \\ &= x\times x+x\times a+2\times x+2\times a \\ &= x^2+(a+2)x+2a\end{aligned}$$

$a+2$ の部分は $5x$ の 5 になるはずなので、 a は 3 でなければなりません。つまり Q は $x+3$ となります。

$(x+2)\times Q=(x+2)\times(x+3)=x^2+5x+6$ ですから、 $(x+2)\times Q+R$ が x^2+5x-4 と等しくなるためには、 R は -10 でなければなりませんとわかります。つまり、

$$(x^2+5x-4)\div(x+2)\text{は商 }x+3\text{、余り }-10$$

ということになります。

先ほど $(x^2+5x-4)\div(x+2)=\frac{x^2+5x-4}{x+2}$ であると考えましたが、分子の x^2+5x-4 が

$(x+2)\times(x+3)-10$ に等しいので、次のように考えることもできます。

$$\begin{aligned}(x^2+5x-4)\div(x+2) &= \frac{x^2+5x-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x+3)-10}{x+2} \\ &= \frac{(x+2)(x+3)}{x+2} + \frac{-10}{x+2} = x+3 - \frac{10}{x+2}\end{aligned}$$

これはちょうど、 $\frac{11}{4} = \frac{4\times 2+3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$ と変形できるのと同じことになっています。

ます。

まとめ

文字式の計算というと算数とは違い、少しむずかしそうな感じを受けます。しかし $5x$ や $3a+2$ 、 $7x-4y$ といった式も“1つの数”と考えてよかったことを思い出せば、基本的には算数での計算とそれほど違いはありません。さらに、ここまで見えてきたように、様々なタイプの計算がありそうに見えても、多くの計算は実は分配法則を用いているにすぎません。

この二つの点に注意しながら、落ち着いて、ていねいに分配法則を用いることを心がけてみましょう。