代入のすすめ
文字式、方程式、関数の学習のために

上越教育大学
布川　和彦

中学校に入って算数が数学に変わると、x とか a といった「文字」が使われる機会が多くなります。6 年生のときも少しは使っていましたが、中学校の数学では、文字式の学習のときはもちろん、それに続く方程式や関数の学習でも文字の入った式ばかり出てきます。

文字の入った式－文字式－は 5＋2 といった数字だけの式とちがって、計算して 1 つの数にまとめることもできないので、どう扱っていいのかわからないところがあります。それでも、a はリンゴ 1 個の値段だとか、x は店で買った鉛筆の本数だといった意味がわかれば、少しはイメージがわきやすいのですが、ただ $3a+5$ とか $-2x-3$ などと言われると、何のことやらわかりません。

中学校の数学を学習するには、文字式に慣れることをさけては通れません。ただ、文字は基本的には「数字の代わり」です。ですから、新種の数字だと思ってつきあっていけばよいので、それほどおそれる必要もありません。

文字を数字の一種だと思ってつきあいやすくするためのコツが「代入」です。新種の数字なのでそのままでは数とは思いにくい場合に、数を代入して式のようすを観察することで、式の感じをつかむことができます。「代入」を利用して、文字式を扱うときのハードルを下げていきましょう。

□のはいった文での代入

「□は動物です」

この□には、いろいろな生きものの名前を入れることができます。「パンダは動物です」としてもよいでしょうし、「ネコは動物です」としたり、あるいは「カエルは動物です」や「カブトムシは動物です」とすることもできます。このように、動物の名前の部分を□にして表しておくと、そこにいろいろな動物の名前を入れることができ、それによりいろいろな文が生まれます。「～は動物です」と書いて、「ほにゃららは動物です」と読むのと同じことです。

「□は動物です」や「～は動物です」のままだとイメージがわきにくくても、□や「～」の部分に自分で何か動物の名前を入れてみると、文の表すことがイメージしやすくなります。「□は動物です」の□に「パンダ」を入れると「そういう感じの情報を伝えたいのか」とわかります。もちろん、□の部分は「パンダ」とは限らないのですが、とりあえず何か入れてみることで、文が“伝えたいこと”の感じがつかみやすくなります。

「カエル」や「カブトムシ」を入れようとすると、今の□にはこれを入れてもいいのかなと気になります。つまり、□に入れてよい範囲のことに意識が向くようになります。そして、それらも入れても大丈夫とわかると、「そうした文でもいいんだ」と文が表そうとしている範囲がはっきりしてきたりします。

文字式に出てくる文字も、今の□と同じです。文字式は数に関わる情報を表す“文”ですが、その数の値としていろいろな可能性が考えられる場合に、その部分をxやy、aといった文字を用いて表しています。数字ではそうした可能性を表せないので、数字の代わりに文字を使うのです。ですから、□にそれらしい単語を入れてみると文の感じをつかむ助けになったように、文字のところにそれらしい数を入れてみると、文字式という文の感じをつかむ助けになります。

文字式での代入

例えば $2x+5$ という文字式があるとき、この式の「x」のところになんらかの数を入れることを、**代入する**というのでした。$2x+5$ の x に 3 を代入すると、

$$2\times3+5$$

となります。式の場合は、文字のところに数が入ることで、さらに計算して結果を求めることができるようになります。今の式であれば、

$$2\times3+5=6+5=11$$

として、計算の結果が「11」になることがわかります。

文字 x に代入した数を**文字の値**、また代入して計算した結果の値を**式の値**と呼ぶこともあります。今の例では、文字の値は 3、式の値は 11 となります。

文字式は、数字では表しにくい部分をとりあえず文字で表しておくことで、その部分の値が決まっていない状態でも、数に関わる情報を表すことができるようにした“文”でした。

ですから、文字は数字と同じと思っていいのです。ただし、数字とはちがい、計算をして 1 つの数として結果を表すことができません。そのため、数字の式よりもとっつきにくいかもしれません。

そこで私たちが文字式と関わるのをサポートしてくれるのが**代入**です。

文字のところに数を代入することで、算数の学習でなじんできた数の式になります。数の式になることで、少し安心しますし、計算を続けることもできるので、式が表そうとしている情報がイメージしやすくなることもあります。

ただし代入を通して文字式と関わろうとするときには、代入で得られた数の式を単に計算して答えを求めるだけでは不十分です。数を代入して数の式にしたり、それを計算して式の値を求めたりする中で、もとの文字式が表そうとした**数に関わる情報**を読み取ろうとすることが大切です。

次のページからは、代入を通して文字式が表そうとした情報として、どのようなことを読み取ったらよいのかを、いくつかの場合にわけて考えてみます。

文字式を数として感じる

$2x+5$ の x は数字と同じ役割であること、また x に例えば 3 を代入して計算をすると 11 という 1 つの数になることを思い出すと、$2x+5$ も実は 1 つの数を表しているとわかります。「＋」が入っているのでまだ計算の途中のような感じもします。$2x$ がいくつかはっきりしませんし、これに 5 を加えた $2x+5$ もいくつかがはっきりしませんから、このような形で表すしかありません。しかし、1 つの数だと思ってよいのです。（参考：式の学習のコツ）

それでも「$2x+5$」という形のままだと、1 つの数だと実感しにくいかもしれません。<u>その実感を得るための 1 つの手立てが代入です</u>。

$2x+5$ の x に 3 を代入して 11 という形にすると、まさに 1 つの数です。また、x に 0 を代入して 5 としても、x に -6 を代入して -7 としても、やはり 1 つの数です。もちろん x は 3 や 0、-6、-7 とは限りませんが、それでも x は数のはずですから、$2x+5$ という式は同じように 1 つの数になるはずです。

いくつか数を代入した結果を観察し、そこからさらに、ほかのいろいろな数も代入した場合をイメージしてみると、いくつかははっきり**しなくても**、$2x+5$ が 1 つの数であると感じられてくるのではないでしょうか。

$2x+5$ という文字式の形だとちょっと素(そ)っ気(け)なく、つきあいづらい感じがするかもしれませんが、ほんとうは 5 や 11 と同じ 1 つの数だとわかれば、話しかけやすくなってきます。

文字式の学習が進むと、次のようなもっと気むずかしそうな式も出てきます。

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}$$

このときも代入をしてみれば、やはり 1 つの数であることがわかります。例えば x に 0 を代入してみると、次のように 1 つの数 -2 になります。

$$\frac{0^2+7\times0+12}{0^2+0-6}=\frac{12}{-6}=-\frac{12}{6}=-2$$

また x に 3 を代入してみると、次のように 1 つの数 7 になります。

$$\frac{3^2+7\times3+12}{3^2+3-6}=\frac{42}{6}=7$$

このように、文字にいくつか数を代入して、「確かに 1 つの数になる」という実感が得られると、その文字式がいくつになるかがわからなくても、「きっと同じように数になる」という感触（かんしょく）が得られます。そうなると、文字式にとっつきやすくなり、文字式を扱うハードルが下がります。いわば、代入は文字式に話しかけるようなものです。

文字式を見て、少しとっつきにくいなと思ったら、文字式と仲良くなるための第一歩として、文字にいくつか数を代入し、式の値を計算してみることを試してみましょう。

文字式で表された数の仕組みを知る

文字式は 1 つの数を表しているといっても、それが“いくつ”なのかは教えてくれません。その代わり、文字式はその数の**仕組み**や**構造**を表しています。

上でみた $2x+5$ という式であれば、この式が表す数について、次のような情報を教えてくれています。

・その数が何らかの数を 2 倍(あるいは 2 を何とか倍)して、それに 5 をたしてできるような数であること。いわば、その数を作る手順やレシピです。

・その数が何らかの数の 2 倍(あるいは 2 の何とか倍)と 5 をあわせたような仕組みや構造を持っていること。

例えば、この仕組みから考えると、この数は x が整数のときは奇数になることもわかります。$2x$ が 2 で割りきれる、つまり偶数ですから、それより 5 だけ大きい数なら奇数になるからです。

あるいは、x が 1.5 や−3.5 といった小数第一位が 5 になる数のときは、$2x$ は整数になるので、それに 5 をたしてできるこの数も整数になることがわかります。

$2x+5$ に $x=3$ や $x=-3.5$ を代入して式の値を 11 や−2 と求めてから、$2x+5$ の表す数がどのような数かを考えることもたいせつですが、仕組みや構造についての情報を読み取るためには、数を代入したときに、あまり計算せずに、できるだけ素材のままの風味を味わうようにする方がよいでしょう。

例えば、$2x+5$ に $x=3$ を代入したら、次のような代入した直後の状態でいったん立ち止まり、式をながめてみます。

$$2\times3+5$$

2 を 3 倍している、あるいは 3 を 2 倍しているということが $2x$ のときよりも感じられやすくなったのではないでしょうか。また 2×3 は 6 になることもすぐにわかるので、「+5」の部分も、2×3 の積に 5 をたすとか、2×3 の積と 5 をあわせるといった仕組みも、無理なく受け入れられるようになります。

代入をしたら“いくつ”を求めてすぐに最後まで計算するのではなく、いったん立ち止まって式をながめ、“どのようにできているか”や式の構造に注意を向けるようにしましょう。この“どのようにできているか”や“どのような構造になっているか”こそが、文字式が表している情報だからです。

文字式の計算や変形に確信をもつ

文字式は基本的に、算数でも学習した計算法則を用いて変形します。（参考 :式の学習のコツ）

簡単な場合はまちがうことはあまりないかもしれませんが、式の形が少し複雑になると、「変形したけどこれでいいのかな」とちょっと心配になることもあります。

そうしたとき、文字のところに数値を代入することで、変形に誤りがないかを確認することができます。

例えば、 $\frac{1}{3}(2x+5)$ という式を以下のように変形したとしましょう。

$$\frac{1}{3}(2x+5)=\frac{1}{3}\times 2x+\frac{1}{3}\times 5$$

$$=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

ここで、最初の式と最後の式の x に同じ数を代入してみます。とりあえず $x=2$ を代入してみると、最初の式は

$$\frac{1}{3}(2\times 2+5)=\frac{1}{3}\times 9=3$$

で式の値は 3 となります。最後の式は、

$$\frac{2}{3}\times 2+\frac{5}{3}=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

となり、やはり 3 になりました。

もう一つ、例えば x＝−1 を代入してみます。最初の式は

$$\frac{1}{3}(2\times(-1)+5)=\frac{1}{3}\times 3=1$$

で式の値は今度は 1 となります。最後の式は、

$$\frac{2}{3}\times(-1)+\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{3}{3}=1$$

となり、やはり 1 になりました。

このように、変形前の式と変形後の式の文字に同じ数を代入して、式の値が同じになれば、おそらく変形は正しかっただろうと安心することができます。

　次のような変形をしたときは、どうなるでしょう。

$$-4(3x-7)=-12x-28$$

変形前の式に例えばx=1 を代入すると、次のように式の値は 16 となります。

$$-4(3\times1-7)=-4\times(-4)=16$$

一方、変形後の式に x=1 を代入すると、次のように式の値は–40 となります。

$$-12\times1-28=-12-28=-40$$

変形前の式に x=1 を代入したときの式の値と、変形後の式に x=1 を代入したときの式の値は等しくなるはずです。これが「一致しない」ということは、「式の変形が正しくない」ことを意味しています。

　そこで改めて式の変形を振り返ってみると、–4 と–7 をかけたときに、符号を＋にせずに–28 としてしまっていることに気づきます。

　このように、変形前と変形後に同じ数を代入したときに、式の値が異なるときは、途中の変形を間違っていると考えられるので、式の変形を振り返って、確かめる必要のあることがわかります。

　何を代入したらよいわからないときは、とりあえずx=0 を代入すると比較的かんたんに式の値を求められることが多いです。

　例えば上の間違った変形では、x=0 を代入すると、変形前の式では式の値が+28 に、変形後の式では式の値が–28 になることが、すぐわかります。x=1 や x=–1 なども代入したときに計算がしやすいことが多いので、これらを代入してみるのもいいでしょう。

　分数が入った式では、分母の数、あるいはいくつかの分母の公倍数を使うと計算がしやすくなります。

　実は文字にいくつを代入したらよいかな、と思いながら式をながめることも、式を「意識して見る」ことにつながり、そこから変形の誤りや、別の変形の仕方に気づくこともあります。

方程式の見通しをもつ

次のような方程式に出会ったとします。

$$5x-3=x+4$$

もちろん、この方程式が気にならなければ、等式の性質を利用して解を求めればよいでしょう。でも、やり方はわかるけど、この方程式が何を言いたいのかよくわからない、というときは、いくつか数を代入してみて、この方程式が“言いたいこと”にちょっと耳をかたむけてみてもよいでしょう。

例えば $x=0$ を代入してみます。すると左辺の式の値は $5×0-3=0-3$ で -3 となります。右辺の式の値は $0+4=4$ で 4 となり、左辺の式の値と一致しません。「あれ、おかしいな」と思いますが、ここから「どんな x の値でもいいわけではない」ということがわかります。

$x=1$ を代入してみると、左辺の式の値は 2、右辺の式の値は 5 となり、やはり等しくなりません。つまり、式の等号が成り立たないのです。「では、いくつにしたら等号が成り立つのかな？」と思います。これが、この方程式の“言いたいこと”です。「私の等号が成り立つような、ぴったりの x の値をみつけてね」とこの方程式は言っているのです。

さらに上の結果を見てみると、$x=0$ を代入したときは、左辺が -3、右辺が 4 でしたから、両辺の差は 7 でした。$x=1$ を代入したときは、左辺が 2、右辺が 5 なので両辺の差は 3 となり、少し縮まりました。ためしに $x=2$ を代入してみると、左辺が 7、右辺が 6 となり、両辺の差は 1 とさらに縮まります。

ではさらに進めて $x=3$ を代入してみると、左辺が 12、右辺が 7 で両辺の差は 5 とかえって広がってしまいます。そこで、x の値は 2 のあたりかもしれない、という予想が立ちます。

実際に上の方程式を解くと解は $x=\frac{7}{4}$ となるので、確かに 2 に近い数となります。この解を代入だけでみつけるのはむずかしいですが、それでも上のようにいくつかの数を代入することで、方程式の“言いたいこと”やそれにどのように応(こた)えることができるかの感触(かんしょく)はつかむことができました。

等号「＝」の入った式を見たときに、いまひとつピンとこないときは、文字のところにいくつかの数値を代入して、とりあえずようすを見てみましょう。

なお逆に、買い物など日常の場面から方程式を作るときも、場面の中の数値をいくつかてきとうに決めてみて、場面のようすをつかむとヒントになるときがあります。いわば、場面の数値への“代入”により場面の感じをつかむということです。

関数の感じをつかむ

関数の学習では、次のような式が現れます。

$$y=2x \qquad\qquad y=\frac{2}{3}x-2$$

これらの式は、変域の中のそれぞれのxの値に対して、どのようなyの値を対応させるのかの「きまり」を表しています。左の式(比例の式)なら、「それぞれのxの値を2にかけた積をyの値とする」というきまりです。右の式(1次関数の式)なら、「それぞれのxの値を$\frac{2}{3}$にかけた積から2を引いた数をyの値とする」というきまりです。

このきまりがどのようなものか、そのイメージをふくらまそうとするときに役に立つのが代入です。いくつかのxの値について、きまりにしたがってyの値を求めてみることで、このきまりの感じをもっとつかもうということです。（参考：関数マシン）

例えば「$y=2x$」のxに1、2、3、4、5を代入して「$2x$」の値を計算してみると、それぞれ2、4、6、8、10となります。「それぞれのxの値を2にかけた積をyの値とする」というきまりなのですが、1→2、2→4、3→6、4→8、5→10という対応を実際に見てみると、xの値を2倍に「ふくらませる」きまりというイメージが見えてきます。「ああ、そういうことね」と感じることができればよいのです。

「$y=\frac{2}{3}x-2$」の方にもxに1、2、3、4、5を代入して「$\frac{2}{3}x-2$」の値を計算してみると、1→$-\frac{4}{3}$、2→$-\frac{2}{3}$、3→0、4→$\frac{2}{3}$、5→$\frac{4}{3}$という対応を実際に見ることができます。このきまりは、xの値を「小さくする」ようです。

このように、xの値とyの値のペアを“作ってみる”ことは、赤の絵の具にまぜる色や量を変えたときにどのような色になるかを、実際にためしてみるようなものです。あるいは調味料の分量を変えたら、どのような味になるのか、実際にやってみるような感じです。

さらにyの値を計算することは「きまり」を実行してみることです。きまりを実行してみることも、きまりの感じをつかむことにつながります。

関数では上のようにして作った x の値と y の値のペアを、x の値の小さい方から大きい方にならべてみると、x の値が変化するような感じになります。そして、それにともなって y の値も変化しているように見えます。つまり、代入して得られたペアをならべることで、今のきまりにより決まる x の値と y の値のペアが、どのようにともなって変化するのかを観察することができます。

関数の学習のときに、表をかいたことがあるでしょう。表は、x の値の小さい方から大きい方にならべながら、x の値と y の値のペアを記録したものです。それにより、x の値と y の値が対応するようすを表現するとともに、x の値と y の値のペアがどのようにともなって変化するのかを見やすくしたものです。

つまり、表はここで見てきた**代入した結果を整理してならべたもの**と考えることができます。それにより、きまりの対応の感じをつかんだり、そこから生まれる変化のようすを観察することをめざします。

例えば比例 $y=2x$ の表であれば、次のように作ってみます。

まずは対応の感じをつかむので、それぞれの x の値に y の値を対応させていくことを意識して、 x の値と y の値のペアを作っていきます。

x	… −1
y	…

x	… −1
y	… −2

x	… −1 0
y	… −2

x	… −1 0
y	… −2 0

x	… −1 0 1
y	… −2 0

x	… −1 0 1
y	… −2 0 2

x	… −1 0 1 2
y	… −2 0 2

x	… −1 0 1 2
y	… −2 0 2 4

x に順に値を代入し、対応する y の値を作っていくと、横の流れができてきます。そうすると、そこに“変化”を感じることができるようになっていきます。そうなると今度は、「x が 1 ずつ増えると、y の値はどのように変化しているのかな」という目で表を見ることにつながります。

代入を通して表を作っていくことで、対応から変化が生まれ、対応の「きまり」がどのような変化を生み出すのかという問題意識につながっていきます。代入は、関数の学習においてたいせつな“対応”と“変化”という見方をつなぐ活動とも言えるでしょう。

対応の感じをつかむために代入するので、x の値はてきとうでかまいません。ですから、まずは計算しやすい場合でようすを見てもよいでしょう。たとえば、

$y=\dfrac{2}{3}x-2$ であれば、x の値として 3 の倍数をとると計算が楽になります。

x	… −3
y	… −4

x	… −3	0
y	… −4	−2

x	… −3	0	3
y	… −4	−2	0

x	… −3	0	3	6	9	…
y	… −4	−2	0	2	4	…

また x=0 のまわりを調べる必要もなく、気になる部分があれば、そのあたりを中心に代入してみるのもよいでしょう。たとえば反比例 $y=\dfrac{12}{x}$ で、x の値がとても大きいときにはどうなるのかが気になる場合は、x=10000 から 10000 おきに代入してみて、対応する y の値を調べてみてもよいでしょう。

x	… 10000	20000	30000	40000	50000	60000	…
y	… 0.0012	0.0006	0.0004	0.0003	0.00024	0.0002	…

グラフを学習した人なら、これらの x の値と y の値のペアから、どのようなグラフになりそうかをイメージしてみると、今の「きまり」から生まれる変化がどのようなものかが、さらにはっきりするかもしれません。

たいせつなのは、関数が変数の入った式で表現されているときに、それがどのような「きまり」なのかの**感じをつかむこと**です。代入した結果を整理し、それを観察してみることで、「きまり」の感じにせまることです。

まとめ

文字式と親(した)しくなっていくと、数の式と同じようにそのままあつかえるようになりますが、最初のうちは、ちょっととっつきにくいものです。私たちと文字式の橋渡しをしてくれる一つの手立てが、代入だと言えるでしょう。「この式、何が言いたいのかよくわからないな」というときには、文字のところに好きな数を代入して、少しだけ自分との距離を縮めてみましょう。

ただ相手の話にも耳を傾けないと、いつまでたっても親しくはなれません。代入したら、それを通して、文字式の“言いたいこと”をよく聞き、私たちの方も、その文字式の気持ちを理解しようと努めるようにしてみてください。そうした経験を重ねる中で、文字式との“対話”も楽しめるようになるはずです。

【「かなりわりきった算数・数学の学び直し」に戻る】
【「算数から数学への橋渡し」に戻る】