計算を支える力持ち：計算のきまり

小学校4年のときに、四則演算に関わっては、次のようなきまりが成り立つことを、学習しました。

$$\text{交換のきまり： } \bigcirc + \triangle = \triangle + \bigcirc、 \quad \bigcirc \times \triangle = \triangle \times \bigcirc$$

$$\text{結合のきまり： } (\bigcirc + \triangle) + \square = \bigcirc + (\triangle + \square)、 \quad (\bigcirc \times \triangle) \times \square = \triangle \times (\bigcirc \times \square)$$

$$\text{分配のきまり： } (\bigcirc + \triangle) \times \square = \bigcirc \times \square + \triangle \times \square$$

中学校に入るとこれらは「法則」と名前をかえて、さまざまな学習に登場します。

$$\text{交換法則： } a+b=b+a、 \quad a \times b=b \times a$$

$$\text{結合法則： } (a+b)+c=a+(b+c)、 \quad (a \times b) \times c=a \times (b \times c)$$

$$\text{分配法則： } (a+b) \times c=a \times c+b \times c、 \quad c \times (a+b)=c \times a+c \times b$$

最初のうちは、いろいろ計算をしてみて、その結果から上のようなきまりが成り立つことを確認していました。しかし学習が進み、文字式を扱うようになると、計算法則はむしろ、文字式の計算をするときに、基本的な変形の仕方を支え、導いてくれる存在になっていました。「計算したらこんな法則が成り立っていた」というよりも、「計算法則にしたがって計算をしていく」のであり、計算法則に対する私たちの向き合い方に、微妙な変化が生まれていたのです。

(参考:算数と数学の違い)

しかし実は、数の計算の仕方を考える際にも、これらの法則は、目立たないけれども、大切な役割を果たしていました。つまり、これらの法則が成り立つからこそ、私たちは数の計算ができていたのです。

ここでは、あまり意識されていないかもしれないけれども、上の法則が数の計算を支えているという例をいくつか見てみます。計算の背後で法則が働いてい

ることを意識すると、計算をよりよく理解することができると思います。

(1) 3つの項の計算

算数の教科書でも $3+8+5$ や $2.5 \times 1.8 \times 3.7$ といった3つの項のたし算やかけ算が出てきます。しかし四則演算は本来は「二項演算」と呼ばれるように、2つの項に対して1つの数を対応させるような演算です。

ですから、3と8と5をたす場合にも、本当は、例えば3と8をまずたして、その結果が得られたら、そこに5をたす、というように、2項ずつ処理する必要があります。式で表せば、 $(3+8)+5$ と考える必要があるのです。

ただ同じ3項をたすとしても、たとえば8と5を先にたしておいて、その結果を3にたすという処理の仕方も可能です。式で表せば、 $3+(8+5)$ ということです。

この2つの結果が異なるとしたら、3項のたし算ではたす順序にかなり注意を払わなければいけなくなります。しかし上の結合法則を仮定すれば、この2つの結果が等しくなると考えることができます。したがって、たす順序に気を使わなくてもよくなり、その順序を指定するカッコも必要なくなります。

カッコが必要なくなったことにより、3つの項のたし算について、カッコをつけずに $3+8+5$ と書くことができるのです。

3つの項のかけ算でカッコをつけずに $2.5 \times 1.8 \times 3.7$ と書けるのも、同じ理由からです。また、4つの項のたし算 $3+8+5+14$ やかけ算 $2.5 \times 1.8 \times 3.7 \times 0.9$ を考えるには、どの3つの項を先に処理しても結果が同じになることを保証する必要が出てきます。したがって、そこで改めて結合法則が用いられることとなります。

(2) 数の筆算

四則演算について、それぞれ筆算で計算するやり方を学習しました。筆算ではかんたんな数の計算を行い、その結果を記録するという操作をくり返すことで、大きな数や小数の計算も行うことができました。

筆算が行われているうらでも、計算法則が用いられています。例えば、かけ算の筆算を考えてみます。

49×32 を筆算で計算する場合、まず32の2を49の9とかけて18と求め、それを記録しました。次に2と4を

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 32 \\ \hline \end{array}$$

かけてその結果を、位に注意しながら記録します。32の3と9をかけた結果、3と4をかけた結果を、再び位に注意しながら、それぞれ記録し、最後に、記録した4つの結果をたしあわせて、 49×32 の積を求めました。

49×32 を $(40+9) \times (30+2)$ ととらえて、計算法則を用いてかっこをはずすと下のようになりますが、これをよく観察すると、上の筆算で行っていたのと同じ計算をしていることに気づきます。

$$\begin{aligned} 49 \times 32 &= (40+9) \times (30+2) \\ &= (40+9) \times 30 + (40+9) \times 2 && \dots \text{分配法則} \\ &= 40 \times 30 + 9 \times 30 + 40 \times 2 + 9 \times 2 && \dots \text{分配法則} \end{aligned}$$

上の筆算では、この4つのかけ算を後ろから順番にやっていたことになります。

つまり、かけ算の筆算は、計算法則が成り立つことを前提として、けたの多い数の計算を1けたの数どうしのかけ算に直していたのです。

2けた以上の数でわるわり算では少し事情がちがいますが、その他の筆算では、基本的にここで見た考え方が用いられており、したがって上の計算法則が筆算を支えていることになります。

(参考：筆算のむずかしさ)

(3) 小数のかけ算とわり算

小数の入ったかけ算の場合も、筆算は(2)で見たのと同じように、計算法則により支えられています。そのときの小数点のうち方についても、実際は計算法則が関わってます。

例えば 2.48×3.6 というかけ算を考えます。筆算では計算する場合、まず 248×36 を計算して8928と求め、最後に右から3番目の数の左側に小数点を打って8.928と積を求めることになります。

このときの小数点の位置について、それぞれの数の小数点より右にある数字の個数をたす、とおぼえて計算しているかもしれません。しかし、計算法則を通して計算を考え直してみると、小数点の位置のことも、よりはっきりと理解することができます。

2.48×3.6 で、2.48を 248×0.01 、3.6を 36×0.1 と捉え直してみると、この計算は次のように考えることができます。

$$\begin{aligned}
2.48 \times 3.6 &= (248 \times 0.01) \times (36 \times 0.1) \\
&= 248 \times 36 \times 0.01 \times 0.1 && \dots \text{結合法則と交換法則} \\
&= 248 \times 36 \times 0.001 && \dots \text{結合法則}
\end{aligned}$$

ここから 2.48×3.6 の積は 248×36 の積に 0.001 をかけたものになることがわかります。この 0.001 をかけることが、右から 3 番目の数の左側に小数点を打つ理由です。さらに 0.001 は 0.01 と 0.1 の積ですから、このときの「3 番目」が 0.01 の小数点以下の数字の個数 2 個と 0.1 の小数点以下の数字の個数 1 個をあわせたものであることもわかります¹⁾。

ともすると筆算のやり方をおぼえて終わりにしてしまいそうな部分でも、計算法則の目で見直してみると、そうする理由もわかりやすく、シンプルな原理でそのやり方が支えられていることに気づきます。

(4) 負の数の計算

負の数の計算の加法や減法は、数直線上の矢印をもとに学習しました。しかし計算法則を通して見直すこともできます。

そのために、1 つだけ確認をしておきます。例えば -3 という負の数があったときに、これは $(-1) \times 3$ と見ることができました。このことを思い出すと、負の数どうしの計算は、分配法則を用いて次のように考えることができます。

$$\begin{aligned}
(-3) + (-6) &= (-1) \times 3 + (-1) \times 6 \\
&= (-1) \times (3 + 6) && \dots \text{分配法則}
\end{aligned}$$

この結果を生かすと、正の数と負の数の加法については、次のように考えることもできます。

$$\begin{aligned}
3 + (-7) &= 3 + (-3) + (-4) \\
&= (3 + (-3)) + (-4) && \dots \text{結合法則} \\
&= 0 + (-4)
\end{aligned}$$

負の数をひく減法として $3 - (-7)$ を考えてみると、この減法の結果である差を $\square$ で表すと $3 - (-7) = \square$ ですから、ひく前の状態に戻すにはひいたあとの結果に

1) 0.1 を 10^{-1} 、 0.01 を 10^{-2} と表すと、 $0.01 \times 0.1 = 10^{-2} \times 10^{-1} = 10^{-(2+1)} = 10^{-3}$ ですから、小数点の位置は指数法則で決まっていると見ることができます。乗法のこと加法的でわかるという意味では、対数の感覚も入ってきているかもしれません。

ひいた分をたせばよい、つまり $\square + (-7) = 3$ となるような $\square$ を求めればよいことになります。さらに $7 + (-7) = 0$ であることを考えると、 $\square + (-7) = 3$ となる $\square$ は $3 + 7$ となることがわかります。実際、 $\square = 3 + 7$ とすると

$$\begin{aligned}\square + (-7) &= (3+7) + (-7) \\ &= 3 + (7+(-7)) && \dots \text{結合法則} \\ &= 3\end{aligned}$$

となります。ここから、 $3 - (-7) = 3 + 7$ であることがわかります。7が正の数であることを強調すれば、 $3 - (-7) = 3 + (+7)$ となりますから、負の数をひくことは正の数をたすことと同じになる、ということが言えます。

同じように考えると、 $3 - 7 = \square$ の場合は $\square + 7 = 3$ となる $\square$ を求めることになります。 $(-7) + 7 = 0$ であることから、この $\square$ は $3 + (-7)$ とわかりますから、結局、 $3 - 7 = 3 + (-7)$ となり、負の数をたすことは正の数をひくことと同じになる、ということも言えます。

(参考：正負の数の学び直し)

(5) 無理数のかけ算

例えば $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ という無理数の乗法を考える際に、以下のような考察をしました。

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} && \dots \text{結合法則と交換法則} \\ &= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = 2 \times 3\end{aligned}$$

ここから $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ は2乗して6になる数なので、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ と決めたのでした。

上の計算では、2行目の $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ を入れ替える部分で交換法則が用いられています。またそもそも、4つの項の乗法を考えている時点で、上で見たように結合法則が用いられています。

つまり、無理数の乗法をどう計算できるかを考えている中で、すでに乗法の交換法則と結合法則が成り立つことが前提とされています。

また $(2 + \sqrt{3}) \times (1 + \sqrt{5})$ という計算をしようと思うと、

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})\times(1+\sqrt{5}) &= 2\times(1+\sqrt{5})+\sqrt{3}\times(1+\sqrt{5}) \\ &= 2\times 1+2\times\sqrt{5}+\sqrt{3}\times 1+\sqrt{3}\times\sqrt{5}\end{aligned}$$

などとしてかっこをはずす必要がありますが、そのためには、分配法則が成り立っていることが前提となります。

このように、無理数については、計算の仕方を決める段階で、すでに計算法則が成り立つことが仮定されています。つまり、他の数と同じ計算法則が成り立つように、無理数の入った計算の仕方を決めていると考えることができます。

まとめ

ここで見てきた例のように、数の計算を実際に行う際にも、うらで計算法則が重要な役割を果たしています。そして、計算法則の目でそれぞれの計算のやり方を見直してみると、なぜそういうやり方になるのか、の理由が見えてきます。

計算法則を、「もしもよゆうがあれば利用してみよう」といった“おまけ”的なものにとらえるのではなく、むしろ計算をうらで動かしているモーターのような存在としてとらえてみてはどうでしょう。そして、そのモーターとしての計算法則がいよいよおもてに出てきて、主役級になっていくのが文字式の計算だと言えるでしょう。