

30 分間で振り返る小中学校で学習した数

1. 数の役割

小学校や中学校での学習を考えると、数の役割は多さや長さ、広さ、重さといった量を表すことです。基準の量である単位とペアになって、量を表します。

例：鉛筆の長さ 5 本分の長さ、2.4 m、 $\frac{2}{5}$ kg

言いかえると、数は量の基準である単位の何倍かを表します。

(参考：割合の学び直し)

量を数を用いて表すと、人に量をはっきり伝えたり、記録したりできます。また、数の大小を比較したり、数の計算をすることで、量について新しい情報を生み出すことができます。つまり、数を用いると量について推論することがしやすくなります。

したがって、数の範囲や種類が増えることで、より多様な量について表現や推論をすることが可能になります。

2. 小さい自然数 【小学校1～3年】

少な目のモノの集まりの多さを表現するために、1、2、3、…、9という数を学習しました。

2つの数の大小については、より多い多さを表す数の方が「大きい」のでした。それを不等号＜や＞を用いて表します。 例： $2<5$ 、 $9>7$

たし算やひき算は、モノの集まりをあわせたり、そこからとりさったりするようすを観察して決めていきました。

例：2個と3個をあわせると5個なので $2+3=5$

さらに小学校2年でかけ算を、3年でわり算を学習しました。かけ算は「集まりの集まり」を観察して決めました。

例：モノが2個の集まりが3個でモノは6個になるから $2\times 3=6$

(参考：[かけ算の学び直し](#))

わり算は $\square\times 3=6$ や $2\times\square=6$ の $\square$ を求めることとして決めました。つまり3倍して6になる数や2を何倍すると6になるかを満たす数を求めます。

例： $\square\times 3=6$ となる $\square$ は2なので $6\div 3=\square$

(参考：[わり算の学び直し](#))

3. 大きい自然数 【小学校1～4年】

多さがもっと多くなったら、いくつかの“まとまり”を作り、その個数もかぞえます。例えば10個のまとまりを考え、10個のまとまりがいくつあるかと、まとまりにならないバラがいくつあるかで多さを表しました。

例：10個のまとまりが3個とバラが7個なので37個

数字を書くときは、新しいまとまりの個数を書く場所を左側に作ります。上で「3」を書いた場所は左側に新しく作った場所で、10個のまとまりの個数を表しました。

なお、10個のモノのまとまりの個数をかぞえるだけでなく、10という数の個数もかぞえることができました。またそれにあわせて、1という数の個数もかぞえることにしました。

例：10が3個で30 1が7個で7

たし算やひき算、かけ算、わり算は、10の個数と1の個数に着目して考えました。

例：37+28なら「10が3個と1が7個」と「10が2個と1が8個」をたすので、「10が5個と1が15個」、つまり「10が6個と1が5個」なので65になる。したがって $37+28=65$

14×7なら「10が1個と1が4個」が7個だから「10が7個と1が28個」、つまり「10が9個と1が8個」なので98になる。したがって $14\times 7=98$

10が10個集まると100、100が10個集まると1000、1000が10個集まると10000、…と10個の集まりを順に考え、それにあわせて数字を書く場所を左側に作っていくと、いくらでも大きい数を作ることができました。

このときの大小の比較や計算も、それぞれのまとまりの個数に着目して、上で見たのと同じようにできました。

4. 小数 【小学校3～5年】

量の基準である単位よりも小さい量を表すために、その単位を10等分した大きさを作り、作った「小さい単位」の個数を表すための数を作りました。小さい単位は10個集めると元の単位に戻るので、それを表す数も10個集めると1になるような数にします。それを0.1と書きました。つまり0.1は10個集めると1になるような数です。

1より小さい数を表すために、1の個数を書く場所の右側に、新しく場所を作りました。ただし、1の個数を書く場所と区別できるよう、境目に点を打つことになっています。この点を小数点と呼ぶのでした。

例：0.4は0.1が4個集まった数

大小の比較やたし算、ひき算、自然数をかけるかけ算は、0.1の個数に着目して考えることができました。0.1を10個集めると1になると決めましたから、1は0.1よりも0.9よりも大きいことになります。

0.1をかけることは、10個集めるとかけられる数になる数を求める、つまりかけられる数の0.1倍を求めることになります。また0.4をかけるのであれば、0.1をかけて作った数を4個集めた数になります。

例：0.7を10個集めると7になるので、7に0.1をかけると0.7になる。

7に0.4をかけると0.7を4個集めた数になるので2.8

わり算は $\square \times 0.4 = 2.8$ や $7 \times \square = 2.8$ の $\square$ を求めることとして決めることができました。

10個集めると0.1になる数を0.01、10個集めると0.01になる数を0.001、10個集めると0.001になる数を0.0001、…と10個集めると前の大きさになる数を順に考え、それにあわせて数字を書く場所を右側に作っていくと、いくらでも小さい数を作ることができました。

このときの大小の比較や計算も、0.01や0.001、0.0001の個数に着目して、上で見たのと同じようにできました。

5. 分数 【小学校2～6年】

小数では、小さい単位を作るときに10等分することを考えました。しかし、等分する数として10にこだわらなければ、別の可能性が出てきます。

(1) 分数の起こり

例えば、元の単位を3等分して小さい単位を作るとします。小さい単位は3個集めると元の単位に戻るので、小さい単位1個を表す数は3個集めると1になるような数でなければなりません。

そのような数を小数の中で見つけようとする、0.333…と3がずっと続く小数になりそうです。しかし3がずっと続き終わりがないと、表現としても不安定ですし、計算の仕方も考えにくいです。

そこでこれまでとはまったく異なる数の書き方を考えます。

この数では、「いくつ集めると1になる数なのか」を書いておく必要があります。しかし、これまでの数の右側や左側は、10個のまとまりでできる新しい数の個数を書くために、使うことにしていました。そこで「いくつ集めると1になるのか」の情報を書き留めるために、下側に新しい場所を作ります。3個集めると1になる数であれば、下側に「3」と書いておきます。その上に「3個集めると1になる数」がいくつあるのか、その個数を書きます。

この書き方に従い、「3個集めると1になる数」はその数が1個あるということなので $\frac{1}{3}$ と書きました。「3個集めると1になる数」が2個ある数なら $\frac{2}{3}$ 、3個ある数なら $\frac{3}{3}$ 、4個ある数なら $\frac{4}{3}$ 、5個ある数なら $\frac{5}{3}$ 、…となります。

「3個集めると1になる数」を $\frac{1}{3}$ と書いたのでは、単に省略した記号にしかすぎず、意味がないように思うかもしれません。しかしこうして“数字っぽく”書いておくことで、これを他の計算の中で使うことができ、新しい情報を生み出すことに役立てることが出来ます。コンピュータのプログラムの中でも文のままよりも分数の方が使いやすいでしょう。そうした使い勝手のよさが分数の魅力とも言えるかもしれません。

分数の「何個集めると1になる数」を表す下側の数を「分母」と、それが何個

あるかを表す数を「分子」と呼びました。また算数で学習した分数は、 $\frac{1}{3}$ のように分子が1の分数を何個か集めてできていました。基準の量である単位が何個か集まって量ができていることに似ているので、こうした分数を「単位分数」と呼びました。

単位分数 $\frac{1}{3}$ の個数に着目することで、 $\frac{2}{3}$ と $\frac{5}{3}$ の大小などを判断したり、それらのたし算やひき算を考えることができました。また、 $\frac{1}{3}$ の個数に着目すると $\frac{2}{3}$ に自然数をかけるかけ算も小数のときと同じように考えられます。

$\frac{2}{3}$ をかけるかけ算は、かけられる数を $\frac{1}{3}$ 倍した数、つまり3つ集めるとかけられる数になる数を見つけ、それを2個集めれば考えることができます。

わり算は、 $\square \times \frac{2}{3} = 4$ や $\frac{2}{3} \times \square = 4$ の $\square$ を求める計算として決めることができました。

ここまでは元の単位を3等分する場合を考えてきましたが、もちろん4等分や5等分、857等分でもかまいません。それによってや $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{17}{5}$ 、 $\frac{239}{857}$ といった分数が生まれます。

(2) 分数に独特な性質

① 個数を書く場所にどのような自然数を書いてもよい

自然数や小数の場合は、10や100の個数を書く場所、あるいは0.1や0.01の個数を書く場所には、0から9までの数しか入りませんでした。それは、10個集めると、その個数は左となりの場所を書くことになるからです。0.1を10個集めたときでも、“0.10”のようにして0.1が10個あることを表すことはありません。

それでいけば $\frac{1}{3}$ は3個集まると1になるので、 $\frac{1}{3}$ の個数としては1個か2個

だけを書けばすむはずですが、しかし実際は、上の $\frac{4}{3}$ や $\frac{5}{3}$ のように、3 より大きい数も分子に入ります。 $\frac{3}{3}$ のように $\frac{1}{3}$ の個数が3個のときも、分数の形で書くことがあります。

なお、1になる分を1に直して、自然数と分数の組み合わせで数を表す場合もあります。例えば $\frac{5}{3}$ は $\frac{1}{3}$ が5個集まった数ですが、5個のうち3個で1を作ってしまう、残りの2個と区別すると、1と $\frac{2}{3}$ になります。これを $1\frac{2}{3}$ と書きます。このように自然数と分数が組み合わさった分数を「帯分数」と呼びました。

② 同じ大きさの数がある

$\frac{3}{3}$ は $\frac{1}{3}$ を3個集めた数なので1になりました。ということは、 $\frac{3}{3}$ という数と1という数は等しくなってしまいます。つまり $\frac{3}{3}=1$ ということです。

また $\frac{1}{2}$ は2個集めると1になる数ですが、0.5も2個集めると1になります。ここから、2つの数は等しい大きさであり、 $\frac{1}{2}=0.5$ であると考えなければなりません。

自然数や小数では、異なる2つの数が等しくなるということはありませんでした。しかし分数を考えるようになると、ある分数がある自然数や小数と等しいということが生じます。

さらに2つの分数の大きさが等しいということも起こりえます。 $\frac{2}{3}$ を3個集めると $\frac{1}{3}$ が6個になるので2になります。また $\frac{4}{6}$ は $\frac{1}{6}$ を4個集めた数ですが、これを3個集めると $\frac{1}{6}$ が12個になるので2になります。 $\frac{2}{3}$ と $\frac{4}{6}$ はどちらも3個集めると2になるので、大きさが等しいと考えられます。つまり $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ で

す。

分数の計算で重要な役割を果たしている通分や約分は、この大きさが等しい分数という考え方を利用しています。例えば $\frac{2}{3}$ と $\frac{5}{6}$ をたそうとすると、 $\frac{1}{3}$ の個数に着目しても $\frac{1}{6}$ の個数に着目しても、うまくたすことができませんが、 $\frac{2}{3}$ と $\frac{4}{6}$ は大きさが等しいことを用いて、 $\frac{4}{6}$ と $\frac{5}{6}$ をたすこととしてとらえなおすと、 $\frac{1}{6}$ の個数に着目して計算をすることができるようになるのでした。このように、大きさが等しい分数を利用して単位分数をそろえることを「通分」と言いました。通分をすると、分数を扱いやすくなる場合があります。

またある分数を考えているときに、同じ大きさの分数うち、できるだけ分子や分母の数が小さい分数と置きかえることができます。これを「約分」と言いました。約分をすることで、分数の大きさがとらえやすくなる場合があります。

大きさが同じ数があることは、これまで学習してきた数とはようすが異なります。しかし等分の仕方が多様にある分数にとっては、大小比較やたし算、ひき算を可能にしてくれる重要な性質でもあるのです。

(3) 分数のその後

学習が進むと、分数の分母や分子に小数が入る場合があります。またこの後出てくる無理数や負の数が入ることもあります。小学校6年で学習した文字 a や x が入ることもあります。この a や x も自然数とは限りません。

そうなると「何個集めると1になるか」や単位分数の個数として分母や分子をとらえようとする、分数を考えにくくなります。

中学校で表れる分数を理解するためには、分数のとらえ方を少しだけ修正しておくとおもしろくなります。

先ほど、 $\frac{2}{3}$ は3個集めると2になることを見ました。つまり $\frac{2}{3}$ は3倍すると2になる数でした。このとらえ方にもとづくと、例えば分母と分子が小数の場合でも、無理なくとらえることができます。

例えば中学校 1 年で反比例を学習するときには、 $\frac{12}{x}$ の x にいろいろな値を代入することになります。(参考 :[代入のすすめ](#))。 $x=0.2$ のときを考えるためには、 $\frac{12}{0.2}$ という分数をまずは受け入れる必要があります。「0.2 個集めると 1 になる数」を 12 個集めた数にとらえると考えにくいかもしれません。しかしこれを「0.2 倍すると 12 になる数」としてとらえると、無理はありませんし、 $\square \times 0.2 = 12$ を考えれば、60 のことだとわかります。 $\square \times 0.2 = 12$ となる $\square$ ですから、上の分数は $12 \div 0.2$ の商のことだと考えてもよいでしょう。

このように、分母や分子にいろいろな数が入る可能性を視野に入れた場合、分数のとらえ方を少し修正して「分母の倍だけすると分子になるような数」とか「分子を分母でわったときの商」としてとらえる習慣をつけておくとよいでしょう。

(参考 : [分数のとらえ直し](#))

6. 無理数 【中学校3年】

(1) 無理数の起こり

面積が 2 cm^2 や 5 cm^2 の正方形の1辺の長さは、 $\square \times \square = 2$ となる $\square$ や $\triangle \times \triangle = 5$ となる $\triangle$ という数です。同じ数どうしをかけることを「2乗する」と言いましたから、これは2乗して2になる数や2乗して5になる数ということになります。

こうした数を小数の中でさがそうとしても、ちょうどそうなような数はどうもなさそうなのでした。また分数の中でさがそうとしても、やはりなさそうでした。そこで、3個集めると1になる数を新しく分数として作ったように、2乗して2になるような数を、新しい記号・根号 $\sqrt{\quad}$ を用い、 $\sqrt{2}$ として新しく作りました。2乗して5になるような数を $\sqrt{5}$ として作りました。

なお $\sqrt{2}$ や $\sqrt{5}$ を小数で表そうとすると、上でも書いたように、1.03125 のようなきちんとした小数でも、また 2.2857142857142857142... のような同じ数の列がくり返し出てくるような小数でも表すことができないのでした。終わりもなく、しかもある数の列がくり返すのでもなく、そうしたくり返しがないままずっと続くような“小数”になってしまいます。終わりのある小数とくり返しのある小数は分数に直すことができますが、くり返しがない“小数”は分数に表すことができません。そこで、 $\sqrt{2}$ や $\sqrt{5}$ のような数を、分数で表せない数という意味で「無理数」と呼びました¹⁾。これに対し、分数の形で表せる数を有理数と呼びました。中学校2年までに学習した数は、すべて有理数です。

(参考：[無理数学習のためのわりきり](#))

2つの数のそれぞれを2乗したときに、2乗した結果がより大きい数は、もと、もう一方の数より大きかったと考えられます。ここから、根号のついた数どうしの大小は、根号の中の数の大小により比べることができました。

なお有理数は2乗して根号の中に入れることで、根号のついた形に直せます。例えば2は $\sqrt{2^2} = \sqrt{4}$ と等しくなります。有理数を根号の中に入れれば、無理数と有理数も大小を比較できます。

$\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ のかけ算などは、無理数の入った計算でも自然数や小数と同じ計算のきまりが成り立つと仮定することで、 $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5}$ となるはずだと、考

1) ここでの「理」は自然数の比の値として表せる、rational という意味です。「無理」はそうした比の値としては表せない、irrational という意味になります。

えることができました。かけ算が決まると、小数や分数のときと同じように、わり算も決めることができます。

無理数の入った計算の場合、たし算とひき算がいちばんわかりにくくなります。 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ が $\sqrt{a}$ という形の 1 つの無理数になればよいのですが、そのために $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=a$ となるような a を見つけようとする、 $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=7+2\times\sqrt{10}$ となり、 a 自体が $\sqrt{10}$ を用いて表される数になってしまいます。つまり、 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ の和を自然数や小数、分数に根号をつけた形で表すことはできそうもないのです。

それであれば、 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ はとりあえず $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ のままにしておいて、計算を先に進めようということにしています。ですから、 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ の計算結果は $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ となります。同様に、 $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ の計算結果も $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ となります。

(2) 無理数と同じ大きさの数

$\sqrt{4}\times\sqrt{2}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{8}$ でした。他方で $\sqrt{4}=2$ でしたから、 $\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\times\sqrt{2}$ ということにもなります。 $2\times a$ を $2a$ と書いたように、 $2\times\sqrt{2}$ も $2\sqrt{2}$ と書いて、一つの数として扱うのでした。したがって、今のことはこれら 2 つの数が等しいこと、 $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ であることを示しています。

このように根号の中の、ある数の 2 乗になっている部分はその数を根号の外に出せることから、 $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ のように、見た目は異なるけれども、実は大きさの等しい数があることになります。

分数でもそのときどきの用途に応じて、大きさの等しい分数を使っていたように、無理数の場合も、大きさの等しい無理数の中で、そのときの用途に応じて、使いやすいものを選んで使うことができます。

例えば $\sqrt{7}$ とどちらが大きいかを比べる場合であれば、 $\sqrt{8}$ の形の方がくらべやすいでしょう。しかし $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ の計算をするのであれば、 $2\sqrt{2}$ の形に直した方が扱いやすくなります。

7. 負の数 【中学校1年】

ここまでの数は、多さや長さ、広さなどの量を表すために作られたものでした。こうした量では、最も少ない多さや最も短い長さは何もない状態です。そのため、量を表す数でも、何もない状態を表す0が最も小さく、他の数は0よりは大きいとして決められていました。

しかし何か基準があり、そこからのズレを考える場合は、同じズレていると言っても、基準より大きい場合と基準より小さい場合があります。例えば、図書館で去年のデータをもとに1週間に貸し出した本の冊数の平均を求め、それを基準として、今年の各週について、その週の貸し出し数と基準とのズレを考えたとします。すると基準よりも多い冊数が貸し出された週もあれば、基準より少ない冊数しか貸し出されなかった週もあるでしょう。

(参考：[量のとらえ直し](#))

このとき、基準からのズレを単に「12冊」と表現すると、基準より多かったのか少なかったのかわかりません。もちろん「12冊多かった」とか「12冊少なかった」と記録することもできます。ただこの書き方だと、そのままでは計算などに使って新しい情報を生み出したり、コンピュータの表計算ソフトに入力して、あとで統計的に処理しようと思ったときには、少し不便そうです。

そこで、基準からのズレという新たな量も表せるように、新しく作られたのが「負の数」でした。ズレより多い場合を表すには、これまでの多さや長さなどを表すための数がそのまま使えますが、負の数とセットで使い、負の数と違うことを強調する場合は「正の数」と呼んで、プラスの記号「+」をつけて表すことにしました¹⁾。例えば17や4.6も、正の数であることを強調するときは、+17、+4.6と書きます。

負の数を表すためにマイナスの記号「-」を用い、これまでの数にこの記号をつけて表しました²⁾。「3冊」の3の前にマイナス記号をつけて、「-3冊」と書くことで、これが基準よりも「3冊少ない」ことを表すことができます。いわば、マイナス記号は、ズレの向きを“逆”にするように働きます。

なお、基準からズレていないことは、「ズレが0」と表すことができます。

1) 負の数を negative numbers と呼ぶのに対して正の数を positive numbers と呼びます。

2) 正負の数を表す記号「+」「-」は、たす、ひくの記号と同じと考えて大丈夫です。-3を「基準の0から3ひいた数」、+3を「基準の0に3たした数」などと考えてみて下さい。

5から3少なくした結果を求めるのに $5-3$ を計算したのと同じようにすると、基準の0から3少なくした結果は、 $0-3$ の計算結果とも言えます。ですから $0-3=-3$ と考えるのが自然でしょう。0から3少なくして、次に3多くしたら、結果は0になるでしょう。ここから $0-3+3=0$ となります。 $0-3$ の結果は-3でしたから、これは $(-3)+3=0$ を意味しています。ここから、-3は3をたすと0になるような数だと考えることもできます。

(参考：正負の数の学び直し)

このようにマイナス記号「-」は、3と打ち消し合うような“反対”の数-3を作る働きがあります。さらに $1\times 3=3\times 1=3$ と同じように、 $(-1)\times 3=3\times (-1)=-3$ と考えてもよさそうです¹⁾。つまり、-1をかけることは、その数と反対の数を作ることであり、数の符号を変える操作にあたることになります。

基準からのズレを考えたとき、基準より多い部分では、「ズレが大きい」ということは貸し出し冊数が多いということです。これを反映させると、基準より多い部分を表す正の数については、今まで通り、3より12の方が大きく、21より12の方が小さいと考えてだいじょうぶそうです。

一方、基準より少ない部分では、「ズレが大きい」ということは貸し出し冊数が少ないということを意味します。これを反映させると、基準より少ない部分を表す負の数については、-3より-12の方が小さく、-21より-12の方が大きいと考えるべきでしょう。そこで、マイナス符号「-」の後の数字の部分が、大きい数の方が負の数としては小さく、小さい数の方が負の数としては大きいと考えることにします。マイナス記号は反対の数を作るので、大小関係も逆転してしまうということです。

0については、ズレがない状態なので、正の数よりは小さく、負の数よりは大きいと考えることができます。このように考えていくことで、新しく作った負の数も含めて、正負の数で大小の判断をすることができるようになりました。

1) 負の数を含む計算でも算数で学習した分配のきまりが成り立つと仮定すると、 $0=0\times 3=((-1)+1)\times 3=(-1)\times 3+1\times 3=(-1)\times 3+3$ となります。つまり $(-1)\times 3$ は3とたして0になるような数ですから、-3になると考えることができます。

たし算については、2つのズレをあわせたときに、全体として基準からどれだけズレていることになるかを調べることで、考えることができます。

7から3を引くことは、3少なくすることになります。上で見たように基準より3少ないことを -3 で表したので、データをあわせる際に3少なくすることは、 -3 のデータを追加することになります。つまり $7-3=7+(-3)$ です。逆に -3 を引くことは、 -3 のデータを取り除くことになりますから、データの合計としては3多くなります。つまり、 $7-(-3)=7+3$ です。もちろん、 $-3+3=0$ であることをもとに、ひき算を考えることもできます¹⁾。

(参考：負の数のシンプルな導入)

負の数に自然数をかけるかけ算については、同じ負の数を“何回かたす”として考えることができます。負の数をかけるかけ算では、 -1 をかけることが反対の数を作ること、符号を変える操作になっていたことを思い出します。また $-3=(-1)\times 3$ であったことも思い出すと、次のように考えることができます。

$$5\times(-3)=5\times(-1)\times 3=(-5)\times 3 \qquad (-4)\times(-3)=(-4)\times(-1)\times 3=(+4)\times 3$$

わり算は小数のときと同じように、今考えたかけ算の仕方をもとにして、 $\square\times(-3)=-15$ や $(-4)\times\square=12$ の $\square$ を求めることとして決めることができるでしょう。

1) $7-(-3)=\square$ とおくと、差である $\square$ は $\square+(-3)=7$ を満たす数です。ここで $-3+3=0$ なので、 $\square$ は $7+3$ となります。実際、 $\square+(-3)=(7+3)+(-3)=7+(3+(-3))=7+0=7$ 。つまり $7-(-3)=7+3$ です。

まとめ

小学校1年から中学校3年までの間に、いくつかのモノの個数を表すための数である自然数から始まり、いろいろな量を表すことができるように、0や大きな自然数、小数、分数、無理数、負の数とさまざまな数を作ってきました。

これらの数をすべて集めた数の世界を作り、その住人である数を「実数」と呼びます。このあと、高校で虚数という数を作り、「実数」の世界も飲み込むような複素数というものを考えるようになると、数の話としてはとりあえず完成になります。

さまざまな数が出てきましたが、それ以前の数字を利用しながら、新しい数を表すための数字の書き方を工夫していました。また、どの数でも、大小の比較ができるようにすることと、たし算、ひき算、かけ算、わり算の四則演算をできるようにすることが、数を作っていくときの大切なポイントでした。

この四則演算に関わっては、次のようなきまりが成り立つことも、小学校4年のときに学習しました。

交換のきまり： $\bigcirc + \triangle = \triangle + \bigcirc$ 、 $\bigcirc \times \triangle = \triangle \times \bigcirc$

結合のきまり： $(\bigcirc + \triangle) + \square = \bigcirc + (\triangle + \square)$ 、 $(\bigcirc \times \triangle) \times \square = \bigcirc \times (\triangle \times \square)$

分配のきまり： $(\bigcirc + \triangle) \times \square = \bigcirc \times \square + \triangle \times \square$

その後の学習で、これらのきまりが小数や分数、正負の数でも成り立つことを確認しました。また無理数を学習する際は、こうしたきまりが成り立つことを前提として、逆にそこからかけ算の仕方を決めていったりもしました。

なおこれらのきまりは「法則」と名前を変えて、文字式の基本的な計算の仕方を決めていくことにもなります。

(参考：[計算を支えるきまり](#))

他方で、さまざまな数が作られ、数の世界が広がることで、変わっていくこともあります。

自然数の世界では、どの2つの数を選んできても、それらをたしたりかけたりすることができました。つまり、2つの数をたした結果も自然数でしたし、2つ

の数をかけた結果も自然数でした。

しかしひき算では、小さい数から大きい数をひこうとすると、その結果を自然数の世界で見つけることはできませんでした。数の世界が負の数もふくむように広がった後では、 $2-5=-3$ のように、小さい数から大きい数をひいた結果を、数の世界の中で見つけることができるようになりました。

わり算でも、 $2\div 8$ の結果を自然数の中で見つけることはできませんでした。小数の世界まで広げてさがすと、その結果である商を 0.25 と見つけることができます。また $3\div 7$ の結果は、小数の世界の中で見つけようとしても、終わりのない小数になりそうではあるものの、ちょっと不安定な感じが残りました。しかし分数を含む世界であれば、その商を $\frac{3}{7}$ として結果を表現したり、その結果を別の計算の中で利用することが可能になりました。

$x^2=5$ という方程式の解を見つけることは、小数や分数を含む世界の中でもできませんでした。無理数まで数の世界を広げると可能になるのです。

このように数の世界を広げることは、表現できる量の種類が増えるだけでなく、計算をしてその結果を表現できる可能性が高まることも意味しています。

ちなみに高校で学習する虚数や複素数は、 $x^2=-5$ という方程式でも解を表現できるように工夫した数になります。また負の数は 1 に対して、それを反対にした、つまり 180° 回転させたような数 -1 を作り出しましたが、複素数を用いると、 180° 以外の回転も数で考えることができるようになります。

小学校から中学校で学習した数やその計算を、バラバラに考えるのではなく、9年間を通して見直し、数の世界の広がりや数というものの成長を味わってみてはどうでしょう。