

## 作図の考え方

～算数から中学校数学、高校数学 A への系譜～

### 目 次

1. アイテムの役割
2. 舞台裏の発想：完成形から考える
  - (1) 正三角形の作図
  - (2) 合同な三角形の作図
  - (3) ひし形の作図
  - (4) 平行四辺形の作図
  - (5) 正六角形の作図
3. 中学校第 1 学年の作図
  - (1) 角の二等分
  - (2) 直線上の 1 点を通る垂線
  - (3) 直線の外にある 1 点を通る垂線
  - (4) 垂直二等分線
  - (5) 1 点を通る平行線
4. 中学校第 3 学年の作図
  - (1) 円上の 1 点を通る円の接線
  - (2) 円外の 1 点を通る接線【補足】正方形の作図
5. 高等学校数学 A の作図
  - (1) 線分 AB をある比に内分する点
  - (2) 線分 AB をある比に外分する点
  - (3) 2 つの長さの積の作図
  - (4) 2 つの長さの商の作図
  - (5) 長さの平方根
6. おわりに

## 1. アイテムの役割

作図で使えるアイテムは、定規とコンパスの2つだけです。数学の作図では、これらのアイテムは次のような役割で使うことになっています。

### (1) 定規の役割

2点を結び、それらを通る直線や線分を引くためだけに使います。したがって、目盛りを読んで長さを知ることは使いません。

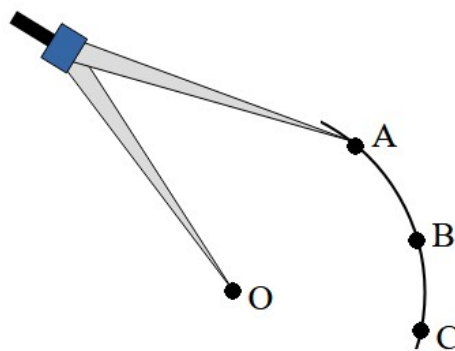
### (2) コンパスの役割

円をかくというよりも、同じ長さを作るために使います。

例えば、ある点Oを中心として、円の一部(円弧)をかくと、円弧の上の点と点Oを結んだ線分の長さは、どの点についても同じになります。

右の図では、円弧の上に点A、B、Cをとると、OA、OB、OCの長さはすべて等しくなります。

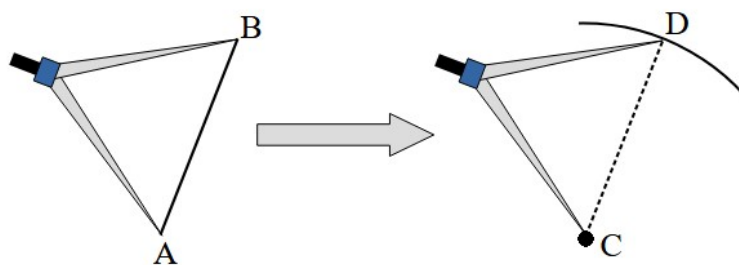
このことを利用して、OAと等しい長さを、OBやOCに作ることができます。



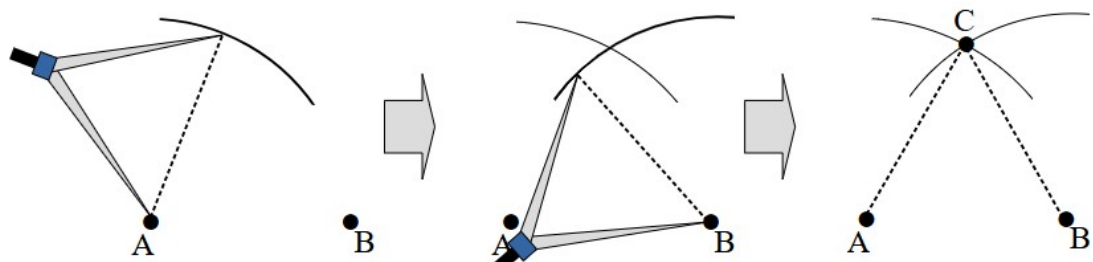
また、ある線分の長さにコンパスを開いて、そのままにして別の場所で円弧をかくことで、元の線分と同じ長さを別の場所に作ることができます。

右の図では線分ABの長さにコンパスを開き、

次に点Cを中心として円弧をかいて点Dを作ることで、線分ABと等しい長さの線分CDを作っています。



半径を同じにしたまま点Aと点Bをそれぞれ中心とする2つの円弧をかき、その交わった点を考えると、点Aからの距離と点Bからの距離が等しい点を作ることができます。2つの円弧の交点をCとすると、線分ACの長さも線分BCの長さも円の半径と等しくなるので、ACとBCの長さが等しくなるからです。



このように、コンパスはある長さと同じ長さを別の場所に作ったり、同じ長さの線分を作ったりするために用いられます。「この長さとの長さを同じにしたい」というときに、コンパスの出番となります。

定規は線を引くことだけにしか使えませんから、作図は結局、コンパスで「同じ長さ」を作ることを行って、目的の図形を作るというゴールを目指す活動になります。

今は図形を正確にかいてくれるソフトウェアも多くありますから、実際に定規とコンパスで図をかく機会は少ないかもしれません。しかし、「どのようにすればかきたい図形を作図することができるか」と考えることは、図形の性質やすでに見つけた作図の仕方を組み合わせてゴールを目指すという点で、図形について証明をすることに似ています。限られた素材だけでゴールを目指すという点では、数学の問題解決そのものと言えるかもしれません。

さらに、あとで見るように、作図の仕方を見いだす際には、「目指すものが手に入ったら、そこからどんなことがわかるだろうか」と考えることが行われます。これは、方程式を立てるときにも用いられる考え方です。

ここでは、作図の仕方をまとめるというだけでなく、その作図の仕方を見出すための考えの進め方にも注意を向けることで、証明や問題解決にもつなげていきましょう。

## 2. 舞台裏の発想：完成形から考える

作図では上で見たように、定規で線を引くことと、コンパスで同じ長さを作ることを繰り返します。ですから、基本的には、「同じ長さの線分」を作りながらゴールを目指す、ということになります。

またゴールを目指すために、次のような発想で考えてみます。

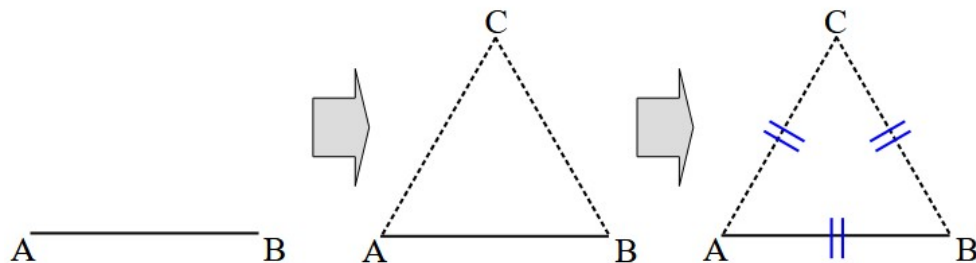
【ゴールした後のことをいろいろイメージする】

算数で学習したことを利用して、この点を考えてみましょう。

### (1) 正三角形の作図

小学校3年生のときに、正三角形のかき方を学習しました。これも実は、中学校のような作図になっています。そのかき方は次のようにして見出すことができました。

線分  $AB$  があり、これを1辺とする正三角形をかくことを考えます。ここで正三角形がかけたとして、その状態をイメージします。そして、そのとき、どのようなことがわかるかを考えてみます。上で見たように、コンパスでは同じ長さを作ることしかできませんから、同じ長さがいないかに注意して考えます。



線分  $AB$  の外に3番目の頂点  $C$  ができているはずです。そして  $\triangle CAB$  が正三角形になっているとすると、3辺の長さは等しいので、辺  $CA$  の長さも、辺  $CB$  の長さも辺  $AB$  の長さに等しくなっているはずです。

逆に言えば、 $CA$  の長さと  $CB$  の長さが線分  $AB$  の長さと等しくなるように、点  $C$  を作ることができれば、正三角形  $CAB$  を作図することができそうです。

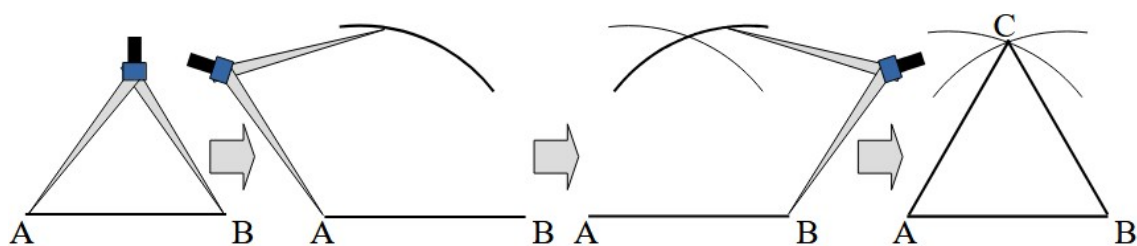
そのような点  $C$  を作ることができるでしょうか。

ここでコンパスの役割が「同じ長さを作る」であったこと、そしてそれを利用して2点から等しい距離にある点を作ったことを思い出します。半径を線分  $AB$  の長さにして、点  $A$  を中心に円をかくと、その円弧の上の点と点  $A$  を結んだ線分の長

さは、線分  $AB$  の長さと等しくなるはずですが。半径を同じにしたまま、今度は点  $B$  を中心として円をかくと、こちらの円弧の上の点と点  $B$  を結んだ線分の長さも、線分  $AB$  の長さと等しくなるはずですが。

もしも 2 つの円弧の交わる部分があるなら、その交わった部分にできる点は、点  $A$  と結ぶと線分  $AB$  と等しい長さの線分になり、点  $B$  と結んでも線分  $AB$  と等しい長さの線分になります。

そこで、2 つの円弧の交わった部分にできる点を点  $C$  として、 $\triangle CAB$  を作ると、 $\triangle CAB$  は正三角形になるだろう、ということがわかります。ここから、次のような作図の仕方を考えることができます。



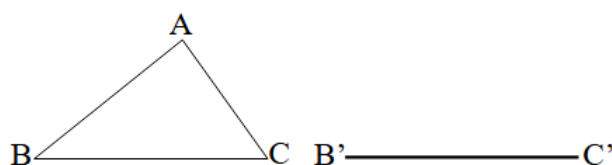
なお、中学校の作図では分度器は使わないので、「 $40^\circ$ 」の角をかくといったことはしません。ただ上で作った正三角形の 1 つの角は  $60^\circ$  ですから、「 $60^\circ$ 」の角であれば、正三角形をかくことで作ることができます。

## (2) 合同な三角形の作図

小学校 5 年生のときに、合同な三角形のかき方を学習しました。そのときは、2 つの辺の長さとその間の角の大きさや、1 つの辺の長さとその両端の角の大きさを利用したかき方もありました。

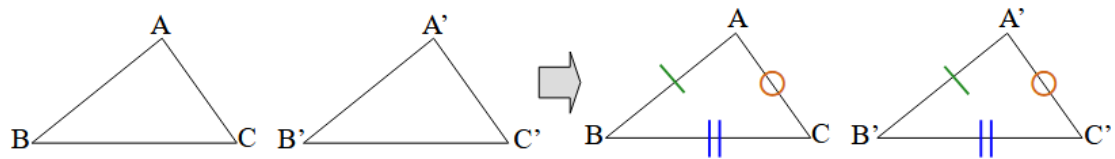
しかし「同じ長さ」を作りながら作図するとなると、使えるのは 3 つの辺の長さを用いたかき方だけになります。また、長さも定規で何  $\text{cm}$  と測定するのではなく、コンパスを開いて「同じ長さ」を作るという操作になります。

$\triangle ABC$  があり、その辺  $BC$  と同じ長さの線分  $B'C'$  があるとき、



$\triangle ABC$  と合同な三角形を作図するには、どうしたらよいでしょうか。

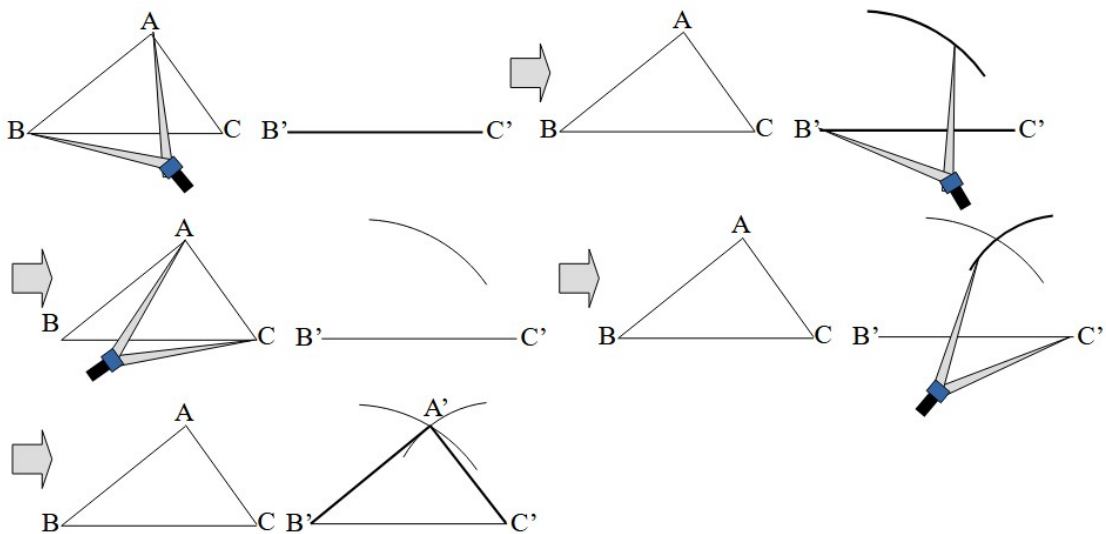
合同な三角形がかけたとして、その状態をイメージし、同じ長さに注意してイメージからわかることを考えると、対応する辺の長さがすべて等しくなっているはずです。線分  $B'C'$  の長さはすでに辺  $BC$  と等しくなっていますので、線分  $A'B'$  の長さが辺  $AB$  の長さと等しく、線分  $A'C'$  の長さが辺  $AC$  と等しくなるように点  $A'$  を決めることができれば、 $\triangle A'B'C'$  は  $\triangle ABC$  と合同になります。



ここから、点  $B'$  から辺  $AB$  の長さだけ離れ、点  $C'$  から辺  $AC$  の長さだけ離れた点を作るといふ、作図の方針が見いだされます。作図の手順としては次のようになるでしょう。

まず辺  $AB$  の長さにコンパスを開き、点  $B'$  を中心として円弧をかきます。次に辺  $AC$  の長さにコンパスを開き、点  $C'$  を中心として円弧をかきます。2つの円弧の交わった部分に点  $A'$  をとります。点  $A'$  は、点  $B'$  からは辺  $AB$  の長さの距離にあり、点  $C'$  からは辺  $AC$  の長さの距離にあるような点ですから、 $A'B' = AB$ 、 $A'C' = AC$  となるはずです。

実際に作図すると次のようになります。

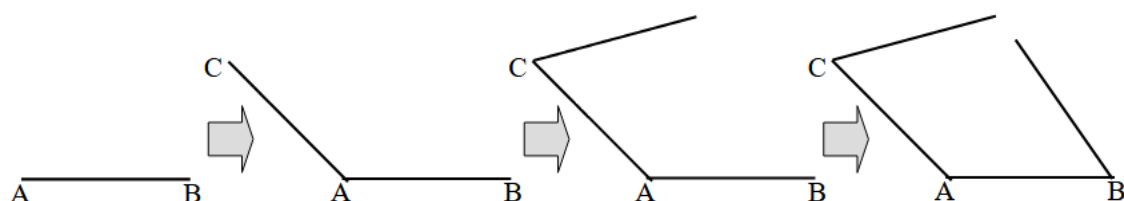


上では、合同な三角形を「同じ長さ」だけを用いて作図しています。しかしできた $\triangle A'B'C'$ の3つの角の大きさは、 $\triangle ABC$ の対応する3つの角の大きさと等しくなっています。このことを利用すると、ある角と大きさの等しい角を作ることができます。もとの角を含む三角形を適当に作り、それと合同な三角形を別の場所に作図すれば、対応する角の大きさも自動的に等しくなるからです。

### (3) ひし形の作図

正三角形は3本の辺の長さが等しい三角形でした。正三角形の作図と同じように考えると、4本の辺の長さが等しい四角形もかけそうです。4本の辺の長さが等しい四角形はひし形でした。

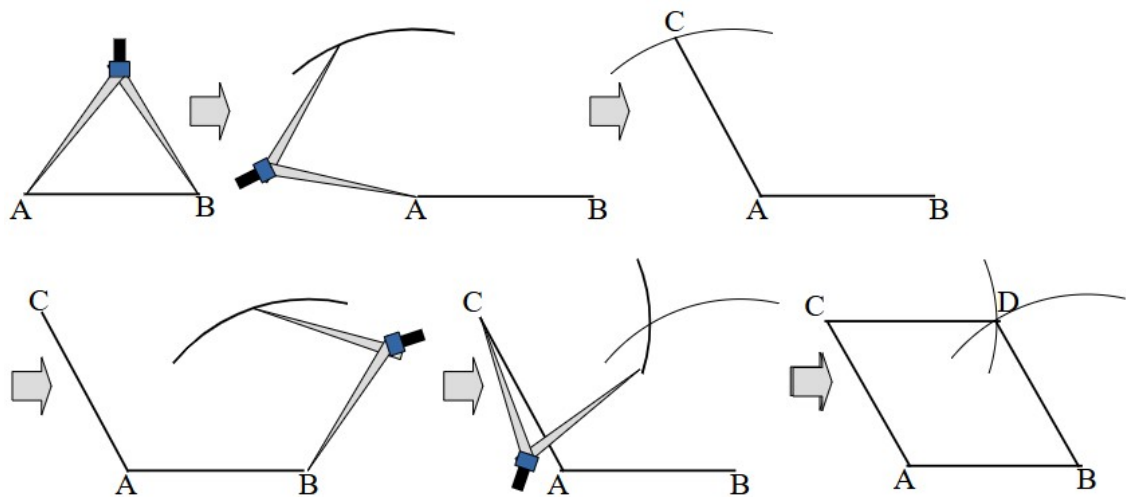
ただし、ひし形の場合、同じ長さの線分を作る順番を気をつけないと、ちゃんとした四角形にならないことがあります。例えば、次のようにすると、同じ長さの線分を4本作図したのに、最後にちゃんと閉じた四角形にならなくなってしまいます。



そこで、まず点Aから線分ABと同じ長さの線分ACを作ったら、点Bからの距離と点Cからの距離がABと等しくなる点を見つけます。そのために、半径をABの長さと等しくして、点Bを中心とする円と、点Cを中心とする円をかきます。2つの円の交点は点BからもCからもABの距離にあるはずだからです。

このとき、点Cと点Bの間の距離は線分ABの長さの2倍よりは短いので、半径をABの長さにして点Cを中心にかいた円と点Bを中心にしてかいた円は、どこかで必ず交わります。

ここで線分ABと同じ長さの線分の作り方と、2点から等しい距離にある点の作り方を思い出すと、ひし形の作図を次のように考えることができます。ただし点Cの作り方は、図の円弧の上であれば、どこにとってもだいじょうぶです。

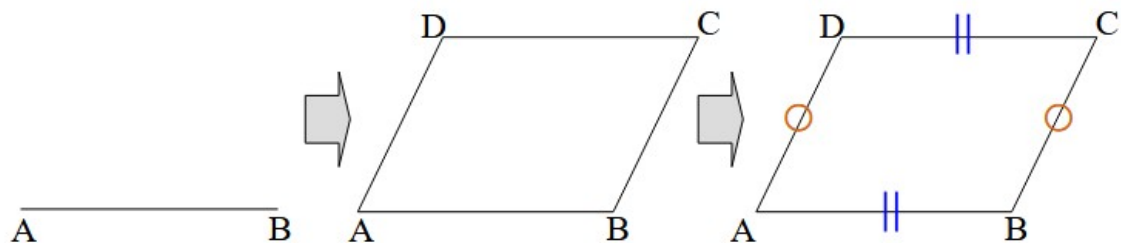


なお、小学校4年生のときに学習したように、ひし形の対角線は垂直に交わります。つまり、対角線の交点のところにできる角の大きさは $90^\circ$ になります。この性質を生かして、 $90^\circ$ を作りたいときにひし形を利用する場合があります。

#### (4) 平行四辺形の作図

線分 AB が与えられたときに、AB を1辺とする平行四辺形を作図することを考えてみます。平行四辺形は2組の向かい合う辺が平行な四角形です。したがって2組の辺がそれぞれ平行になるように作図すれば、平行四辺形がかけそうです。

ただ、算数では平行な線を三角定規を使ってかいていましたが、中学校の作図では三角定規を使うことはできません。そこで、線分 AB を1辺とする平行四辺形がかけたとして、その状態をイメージします。そして、そのとき、平行以外のことで、どのようなことがわかるかを考えてみます。コンパスでは同じ長さを作ることはできませんから、同じ長さがいないかに注意して考えます。



すると向かい合う辺の長さが、それぞれ等しいことに気づきます。上の図の青

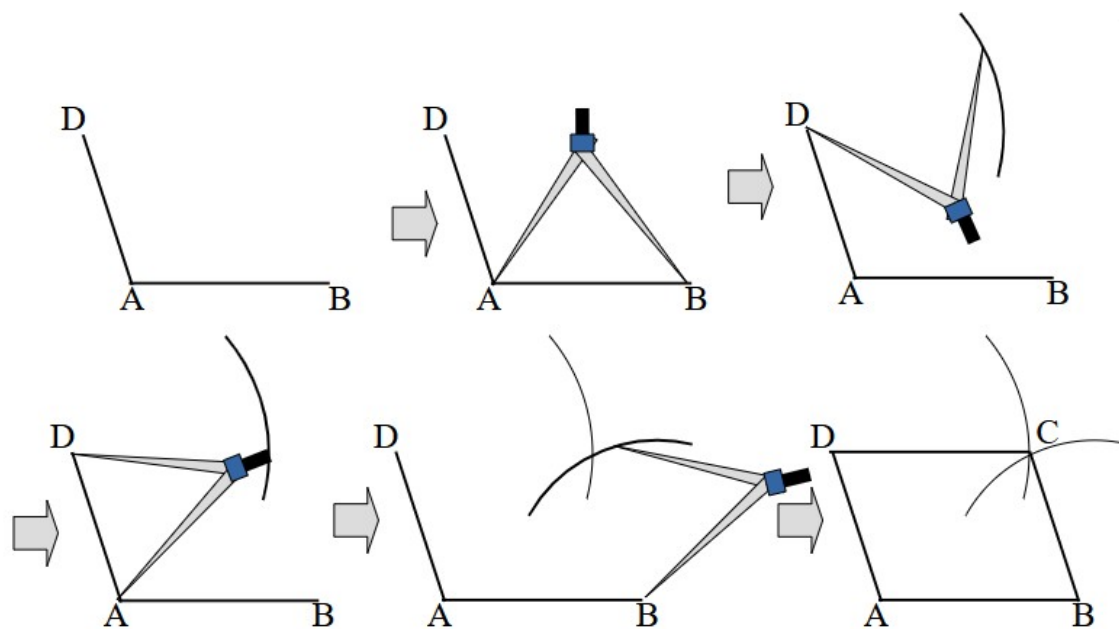
い二本線  $\parallel$  をつけた2辺の長さは等しく、またオレンジ色の丸  $\bigcirc$  をつけた2辺の長さも等しくなるのでした。

図の辺ADの長さとBCの長さが等しく、辺ABの長さとDCの長さが等しくなるように作図ができれば、できた図形は平行四辺形になりそうです。

コンパスと定規による[同じ長さの線分の作り方](#)や、それを用いたひし形の作図の仕方を思い出すと、点Dを作った後、Dからは線分ABの長さだけ離れていて、点Bからは線分ADの長さだけ離れている点を作るという、作図の方針に気づきます。手順としては次のようになりそうです。

まず点Dを適当にとり、点Aと結びます。ひし形の場合とはちがい、辺ADの長さは辺ABと等しい必要はないので、点Dは適当でかまいません。次に半径を線分ABの長さと同じにして点Dを中心として円をかきます。最後に半径を線分ADと同じにして点Bを中心とした円をかき、2つの円の交点を点Cとします。このようにすれば、線分DCの長さは線分ABと等しくなり、線分BCの長さは線分ADと等しくなるはずです。

この方針にしたがって作図をしてみると、下のようになります。

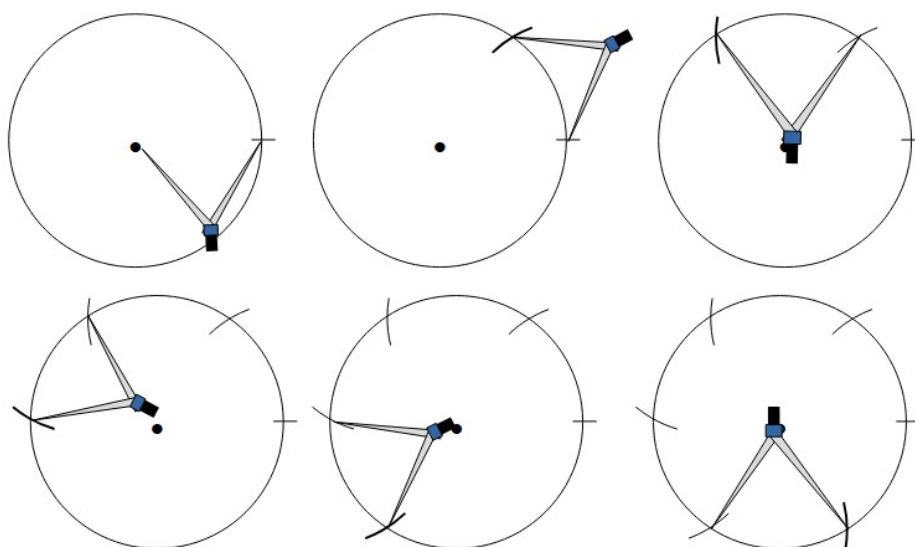


今の平行四辺形の作図では、平行という性質は使わず、向かい合う辺の長さが等しいという性質だけを用いていました。しかし、できた平行四辺形では、当然、向かい合う2組の辺はそれぞれ平行になっています。つまり、辺の長さだけを用

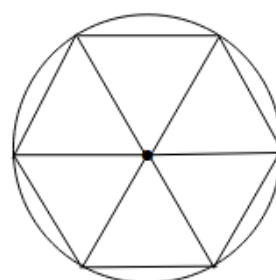
いて平行を作り出すことができますから、今の平行四辺形を利用して、平行な線を作図することも考えられます。

## (5) 正六角形の作図

コンパスで円をかいたら、コンパスの開き方を半径の長さのままにして、円周上にコンパスで順に点をとっていくと、正六角形をかくことができると、算数で学習しました。



このかき方で正六角形をかくことができるのは、正六角形がかけたとして、円の中心と正六角形の各頂点を結ぶと、右の図のように、6つの正三角形ができること、したがって正六角形の1辺の長さがちょうど円の半径と同じになることによるものです。



では円を自分でかいてから正六角形をかくのではなく、線分 AB が先に与えられているときに、AB を1辺とするような正六角形をかくには、どうしたらよいでしょうか。

初めに円がないので、その中心也没有せん。しかし上の図のように正六角形がかけたとして、その状態をイメージしてみます。すると、次のような作図の2つの方針が見えてきます。

方針①：一つの方針として、まず線分  $AB$  を 1 辺とする正三角形  $ABC$  をかきます。上の図からわかるように、正三角形の三番目の頂点  $C$  は、上の作図で利用した円の中心になります。したがって、点  $C$  を中心として半径が線分  $AB$  の長さであるような円をかくと、上の作図の仕方をそのまま利用することができます。

方針②：正六角形は 6 つの正三角形からできています。それらの正三角形の 1 辺の長さは線分  $AB$  の長さと等しくなります。そこで、①と同じようにして正三角形  $ABC$  を作図したら、次に辺  $CB$  を 1 辺とする正三角形  $CBD$  をかきます。さらに辺  $CD$  を 1 辺とする正三角形を作図し、と続けていくと、正三角形を 5 つ作図した時点で、正六角形の 6 つの頂点がすべて決まります。

ここまで見てきたように、小学校で学習した図形のかき方の多くは、中学校の作図と同じ方針でかかれていたのです。すなわち、コンパスで同じ長さを作るときをくり返して作図する、ということです。

またその方針を見つけようとするときは、かきたい図形がかけたとして、その状態をイメージし、そこからわかることを考えてみるとよさそうでした。特に、コンパスで同じ長さを作ることになるので、同じ長さがいないかに注意しながらわかることを考えていくと、定規とコンパスで作図するための方針が見えてきそうです。

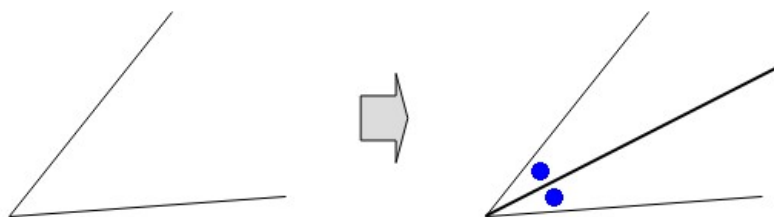
### 3. 中学校第1学年の作図

中学校第1学年では、線分や角を二等分したり、ある線分や直線に垂直な線(垂線)を引いたりする作図を学習します。

#### (1) 角の二等分

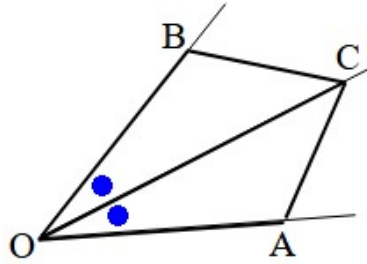
角があるときに、それを二等分するような線を作図するには、どうしたらよいでしょうか。前のことを思い出すと、角を二等分する線がかけたとして、その状態をイメージしてみて、そこからわかることを考えてみます。ただし、作図で使えるのは定規とコンパスだけであり、それでできるのは、基本的には同じ長さの線分を作ることなので、線分の長さについてわかることを中心に考えてみるのでした。

そこで、下図の左のような角があるとして、それを二等分する線が引けたとすると、右のようになります。青い●は角の大きさが等しいことを表しています。ただここには線分がなく、したがって長さに関わりわかることはありません。



そこで、合同な三角形のかき方でふれたように、角の大きさと線分の長さをつなぐ助っ人として、三角形を導入します。合同な三角形は3つの辺の長さが同じになるようにしてかけますが、できた合同な三角形では、対応する角の大きさも等しくなりました。つまり、辺の長さを同じにすることで、同じ角の大きさを作ることができます。

そこで、角を二等分する線が引けたときにできる等しい角の大きさが、合同な2つの三角形の対応する角になるように、合同な三角形をかくことができれば、等しい角を作ることができます。例えば、下の図のような2つの三角形、 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ が合同になるように作図できれば、もとの角 $\angle AOB$ の中に同じ大きさの2つの角 $\angle AOC$ と $\angle BOC$ が入るので、 $\angle AOB$ が二等分されたことになりそうです。

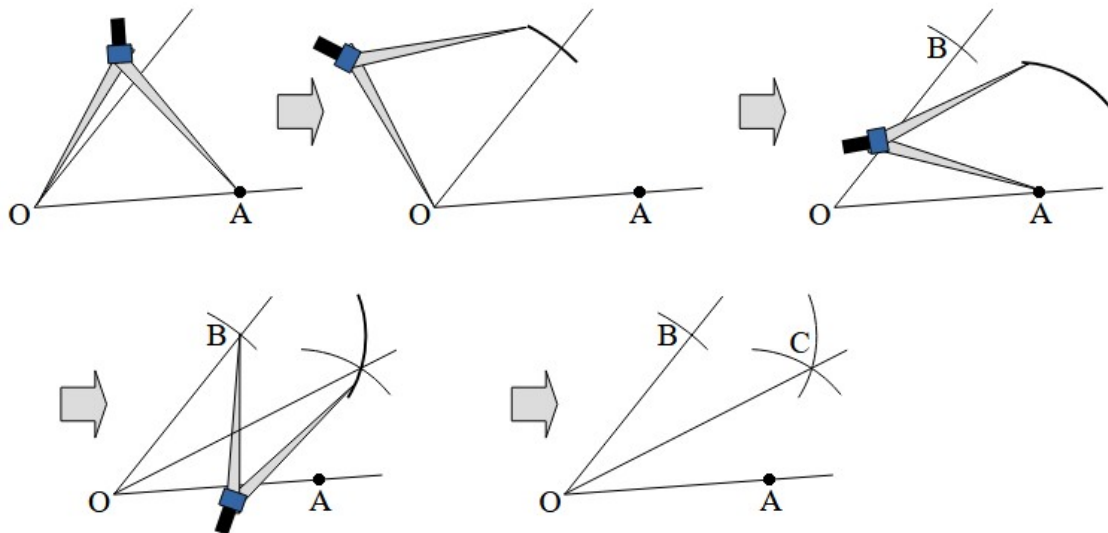


この2つの三角形 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ が合同になるようにするには、対応する辺の長さをすべて等しくする必要があります。

ここで辺OCは2つの三角形に共通ですから、自動的に等しい長さになります。そこで辺OAとOBの長さを等しくし、辺ACとBCの長さが等しくなるように点Cを作る、という作図の方針が見えてきます。

手順としては次のようになります。

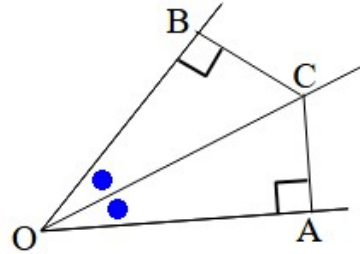
まず点Aを適当にとります。そしてコンパスを線分OAと同じ長さに開いたら、点Oを中心として円弧をかき、角の反対側の線と交わったところを点Bとします。これで $OA=OB$ になりました。次にコンパスを適当に開き、点Aと点Bをそれぞれ中心として2つの円弧をかき、交点を点Cとします。点CはAとBから等しい長さだけ離れています。最後に、点Oと点Cを結ぶ直線を引きます。



この作図により2つの合同な三角形 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ ができるはずであり、 $\angle AOC$ と $\angle BOC$ の大きさが等しくなるので、もとの角の大きさが二等分される

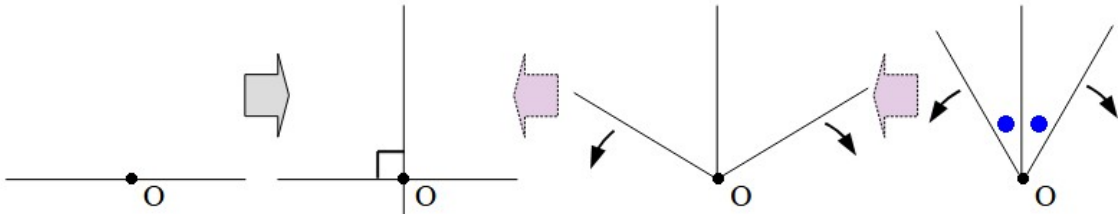
ことになります。

なお、 $\triangle OAC$  と  $\triangle OBC$  として、仮に直角三角形を選ぶことができたとしても(実際には直角が作れなければ直角三角形も作図できませんが)、右図のようになります。つまり、角の二等分線の上にある点は、角を構成する2つの直線から等しい距離にあることがわかります。ここから、角を構成する2つの直線から等距離にある点を作りたいときは、角の二等分線の作図をもとにすることができます。



## (2) 直線上の1点を通る垂線

直線や線分があり、その上に点Oがあるとします。点Oを通り直線や線分と垂直に交わる直線、つまり垂線を作図することを考えます。そこで、作図したい垂線がかけたとして、その状態をイメージしてみます。

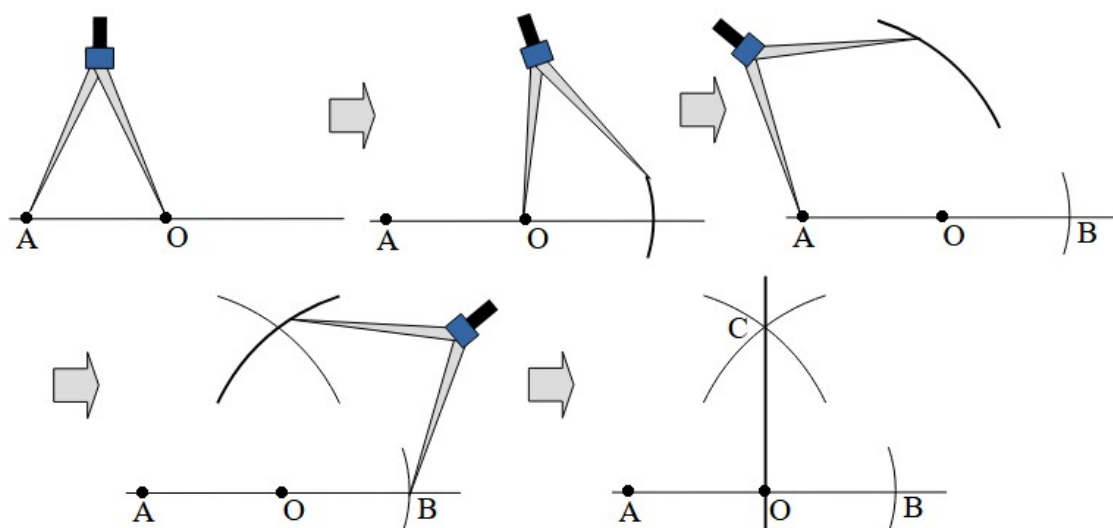


ここで、上の右から左に向かう矢印のように、角の二等分のときの図を“広げて”みると、点Oを通る垂線は、点Oのところにできる $180^\circ$ の角を二等分していると見ることができます。 $180^\circ$ を2つの $90^\circ$ の角に分けているということは、 $180^\circ$ の角を二等分しているということだからです。

したがって、[角の二等分の作図の仕方](#)と同じ方針で、垂線を作図すればよいことがわかります。すなわち、線分OAとOBの長さが等しくなるように点A、点Bを直線上にとり、さらに線分ACとBCの長さが等しくなるように点Cをとります。これにより、対応する3辺の長さが等しい2つの三角形 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ を作ることを目指します。

$\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ が合同になると、対応する角の大きさも等しくなるので、

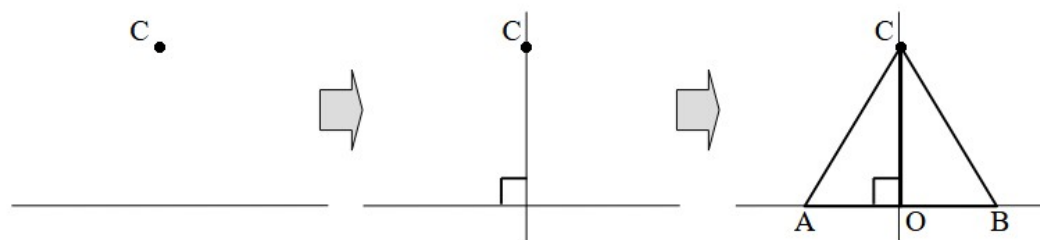
$\angle AOC$  と  $\angle BOC$  の大きさも等しくなります。つまり、 $180^\circ$  の  $\angle AOB$  が二等分されるので、それぞれの角の大きさは  $90^\circ$  となります。



2つの三角形 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ をイメージしながら作図すると、 $OC$ が垂線になることもとらえやすくなります。

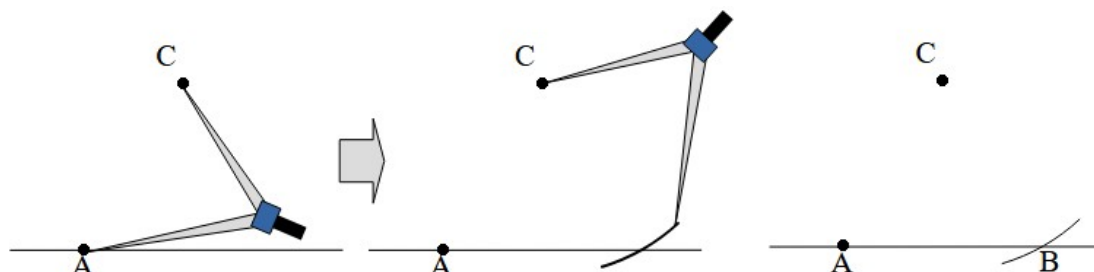
### (3) 直線の外にある1点を通る垂線

垂線が通るはずの点 $C$ が、直線の上ではなく、直線の外にある場合はどうでしょう。作図したい垂線がかけたとして、その状態をイメージし、そこからわかることを考えてみます。直線と垂線が交わる点 $O$ から左右に同じ長さの線分 $AO$ と $BO$ を作ると、それらの線分と垂線の一部が辺になっているような、合同な2つの直角三角形がかけそうです。



ただし今回は、点 $O$ がどこなのかはまだわかりません。その代わりに点 $C$ の位置はすでに決まっています。そして2つの三角形が合同であることから、辺 $AC$

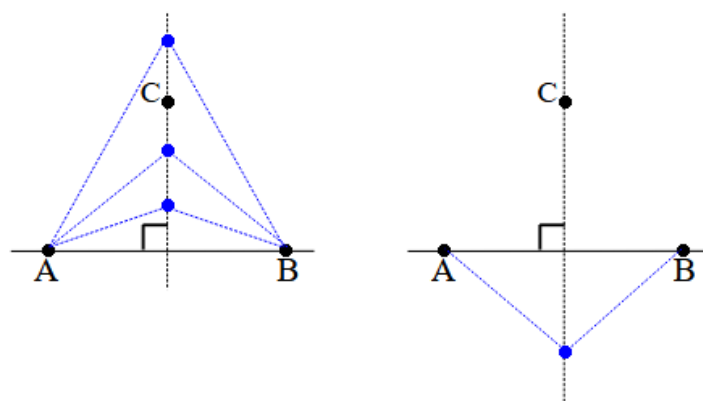
と辺BCの長さは等しくなるはずです。そこで、逆に、ACとBCの長さが等しくなるように点AとBを作ることが考えられます。これはコンパスを使えばできそうです。これで作図の方針が少し見えてきました。



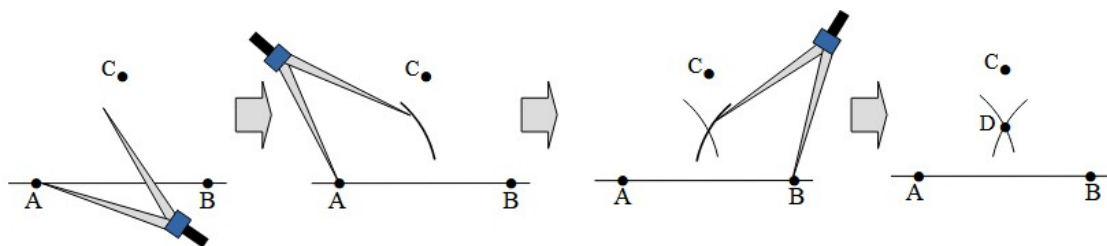
垂線のような直線を決めるには、2つの点を通るように引く必要があります。点Cは垂線の上にあるはずですから、もう1つ垂線の上にあるような点、つまり点Cの真上や真下にある点がほしいところです。他にそうした点を作れないでしょうか。

前の合同な三角形がかかれた図を見ると、三角形の頂点は点Cでなくても、引きたい垂線の上にある点であれば、どこでも合同な2つの三角形を作ることができます。例えば、

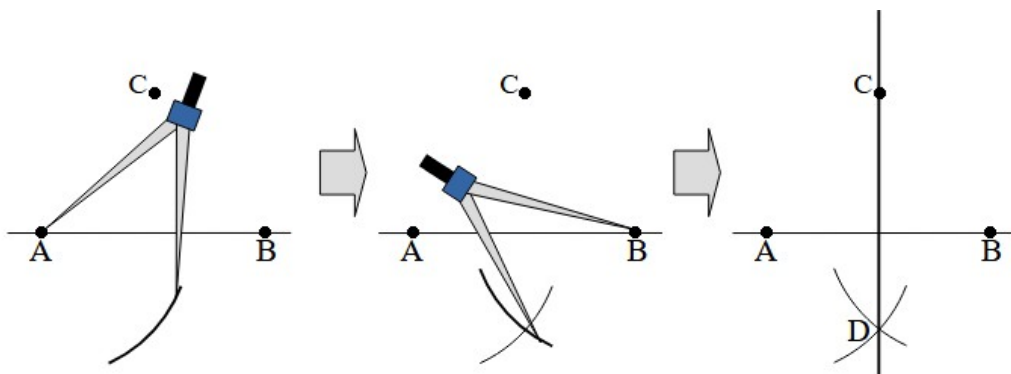
- ・点Cの上や下にあるような点
- ・直線をはさんで点Cと反対側にある点



点Cの下に点Dを作る場合は、コンパスをACの長さより少し小さく開いて、点Aと点Bをそれぞれ中心として円弧をかき、2つの円弧の交わったところを点Dにすればよいでしょう。



点Cと反対側に点Dを作る場合は、コンパスの開き方は適当でよいのですが、円弧をかくときに、直線の下側にかくことになります。

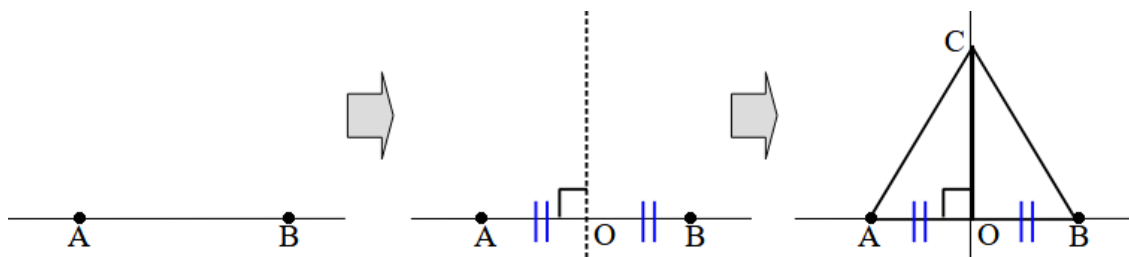


点Cを通る垂線の作図は、上の点Aと点Bを作る作図と、点Dを作る作図を組み合わせた手順になります。

#### (4) 垂直二等分線

線分ABがあるときに、この線分のちょうど真ん中を通り、線分ABと垂直に交わるような線、すなわち線分ABの垂直二等分線を作図することを考えます。

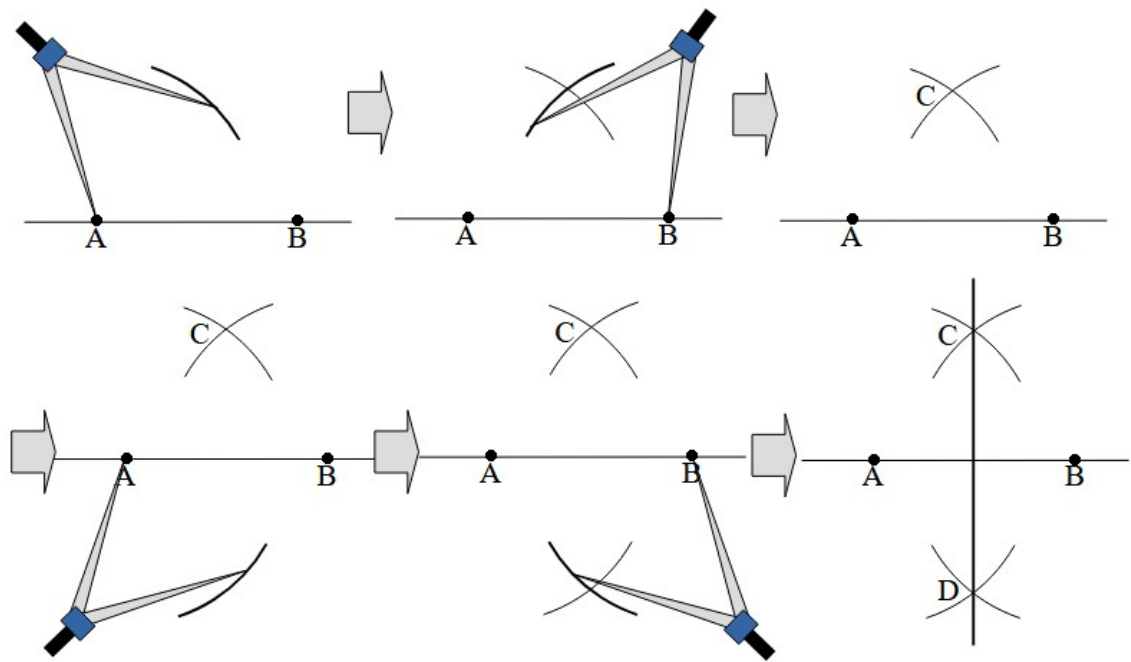
垂線が通るはずの点は、まだわかっていません。その代わりに、直線上に2つの点AとBはすでにあります。AとBのちょうど真ん中を通るような垂線がかけたとして、その状態をイメージすると、その真ん中の点Oと垂線上の点Cと点AあるいはBとで作られるような、2つの合同な三角形がかけられるはずです。



最後の図は、前にやった点Cを通る垂線の場合と同じ図になっています。ただし今回は、点Cがどこかはわからず、代わりに点AとBはわかっています。

そこで、前とは逆に、点AとBから点Cを作り、その後は前に垂線をかいたのと同じようにすれば、線分ABの中点を通る垂線がかけそうだ、という方針が見えてきます。

以上のことを作図の手順に直すと、次のようになります。



1番目から3番目の図では、点AとBから同じ距離にある点Cを作っています。4番目以降は、前に垂線を引くために点Dを作ったのと同じ作図になっています。

なおここでは点Dを線分の反対側に作っていますが、点Cと同じ側に作るようにして作図することもできます。どのような形であれ、垂直二等分線の上にあるような点を2つ作ればよいのです。

また、上の作図では、上側で円弧をかくときと、下側で円弧をかくときとで、コンパスの開き方を変えていません。そのため、4つの線分AC、BC、AD、BDはすべて同じ長さになります。したがって、これらを結んでできる四角形ADBCはひし形になります。そして、線分ABと垂直二等分線の一部CDはこのひし形の対角線になります。小学校4年生のときに学習したように、ひし形の対角線はそれ

ぞれの midpoint で垂直に交わるのでしたから、線分 CD が線分 AB の垂直二等分線になっていることと、話のつじつまは合っています。

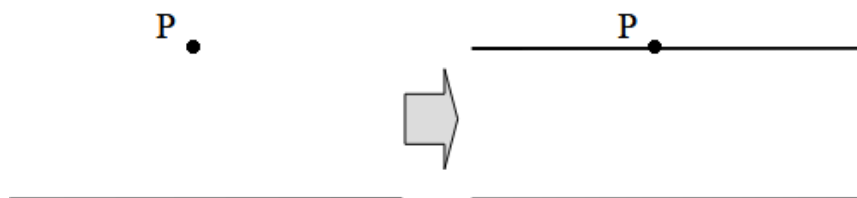
逆に言えば、上の作図は、ひし形の対角線の性質を利用しているとも見ることができます。

円や円の一部があるとき、円の中心を見つけるために、垂直二等分線の作図が利用できます。円周上の 2 点を結んだ線分、すなわち弦の垂直二等分線上に円の中心があるからです。2 つの弦の垂直二等分線をそれぞれ作り、2 つの垂直二等分線の交点を作ると、それが円の中心になります。

#### (5) 1 点を通る平行線

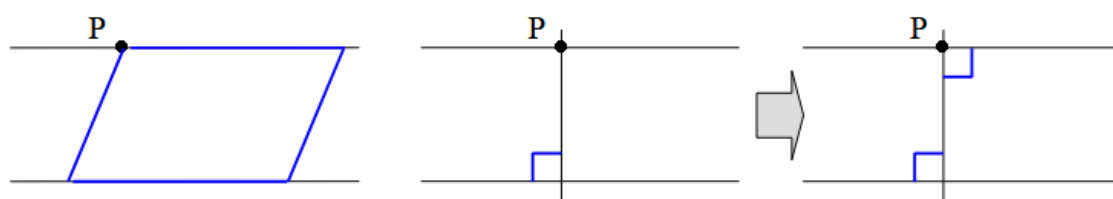
教科書では扱われていないかもしれませんが、垂線の作図を考えてきましたから、平行線の作図についても考えておきましょう。

ある直線と、その直線上にない 1 点 P があるとし、この P を通りもとの直線と平行な直線を作図することを考えます。点 P を通る平行線がかけたとして、その状態をイメージし、どのようなことがわかるかを考えてみます。



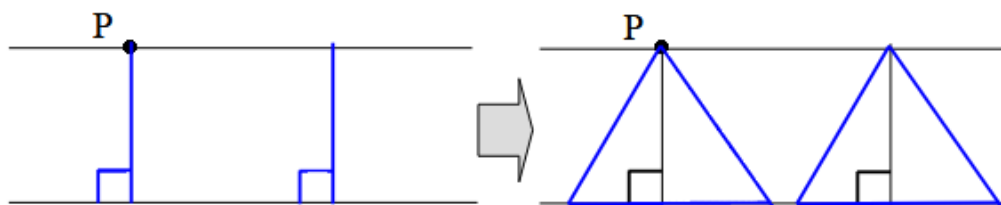
平行な線がかけたとすると、それを利用して、下の左の図のような平行四辺形を作ることができます。

また、小学校 4 年生のときに、平行な 2 本の直線は 1 本の直線と垂直に交わっていることを学習しました。したがって、下の中央の図のようにもとの直線に垂線を引いたら、平行な線もその垂線と垂直に交わっているはずだ、ということもわかります。



さらに、4 年生のときには、平行な 2 本の直線の幅はどこでも等しくなっている

ることも学習しました。したがって、下の左の図のように、どの部分の幅を測っても同じ長さになります。そうすると、右の図のように、その幅を高さとして合同な三角形を作ることでもできそうです。



このように、平行線がかけたとして、そこからわかることをいろいろ考えてみると、それをヒントとして、作図の方針が見えてきます。上でわかったことを利用すると、それぞれ、次のような作図の方針が見えてきます。

#### ① 平行四辺形を作ることができる

直線の一部を平行四辺形の1つの辺ととらえ、点Pが平行四辺形の頂点の1つとなるように平行四辺形を作図すれば、点Pを通る平行線を作図することもできるはず。

#### ② 1本の直線に垂直に交わっている

点Pを通るもとの直線の垂線を作図する。次に、点Pを通り今作図した垂線に垂直に交わる垂線を作図すると、あとで作図した方の垂線が、もとの直線と平行になるはず。

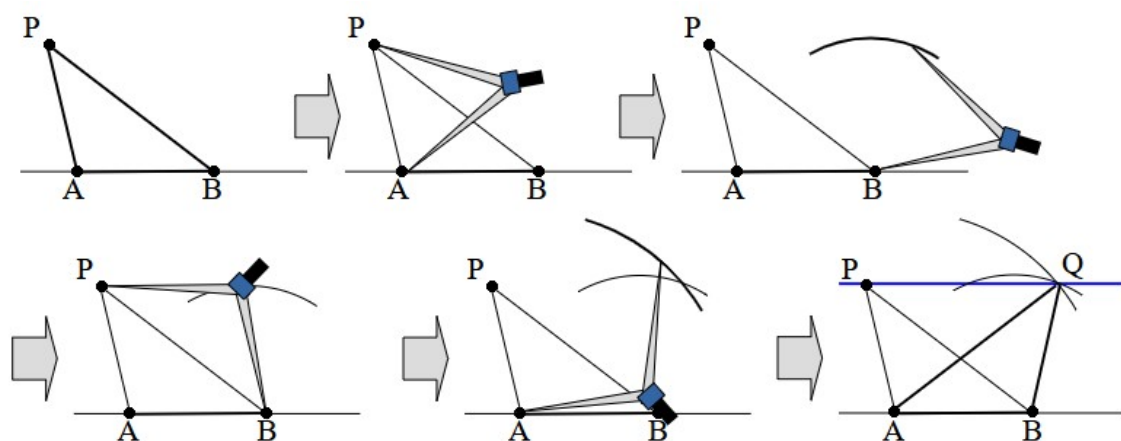
#### ③ どこでも幅が等しい

幅が等しいことから、平行線を利用すれば、高さの等しい2つの三角形を作ることができそうでした。そこで、逆に、高さの等しい三角形を2つ作り、その頂点を結んで平行線を作図してはどうかと考えることができます。

さらに、合同な三角形であれば高さも等しいので、合同な三角形を2つ作ることで、高さが等しい三角形を作ったことになります。

もとの直線の上に1辺があるような合同な三角形であればよいのですが、1つの線分を2つの三角形の辺として利用すれば、作図の手間がはぶけます。ただ同じ向きに作ったのでは、点Pとは別の点を作ることができなくなります。そこで、下ののように、1つの辺を共有するが、向きが反対になった合同な三

角形を作図すれば、点Pとは異なる頂点Qを持つような合同な三角形を作ることができます。このとき、2つの三角形 $\triangle PAB$ と $\triangle QBA$ は合同なので、それらの高さは等しくなります。最後に三角形の頂点を結ぶように直線を引くと、直線PQのような平行な直線を作図することができます。



このように、作図したい線がかけたとして、その状態をイメージし、そこからわかることを考えてみると、作図の方針がいろいろ生まれることもあります。作図の手順を習得して、手早く作図できるようになることも大切ですが、かけた状態からイメージをふくらませて、作図の方針を自分でも工夫してみることに挑戦してみましょう。

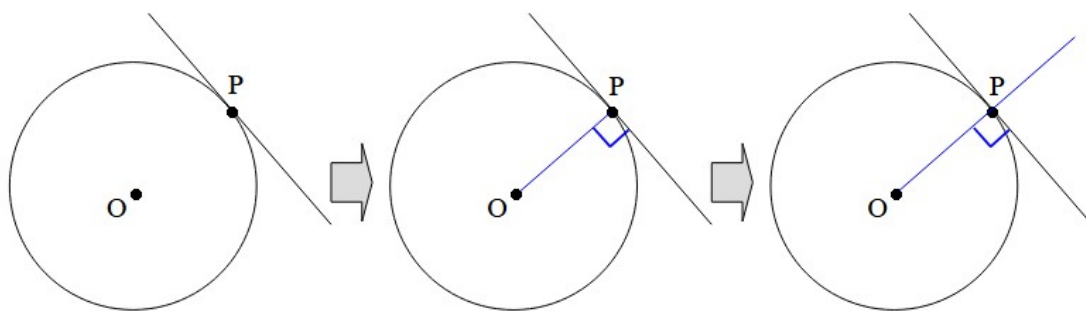
#### 4. 中学校第3学年の作図

中学校第3学年では、円の学習をする中で、円に関わる作図を学習します。

##### (1) 円上の1点を通る円の接線

円の上にある点Pを通り、この円に接する直線、すなわち接線を作図することを考えます。点Pを通る円Oの接線がかけたとして、その状態をイメージし、どのようなことがわかるかを考えてみます。

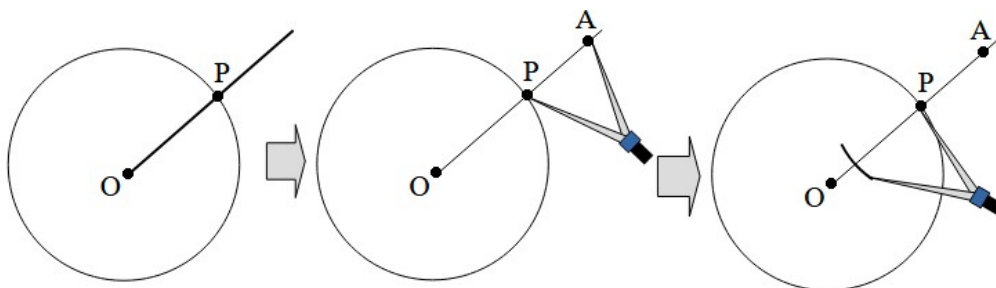
中学校1年生のときに学習したように、円の接線は、接点を通る半径に垂直になっているのです。したがって、接点のところにできる角は直角になります。



半径を少し伸ばしてみると、作図したい接線は、点Pを通る直線OPの垂線になっていることがわかります。

ここから、次のような作図の方針が見えてきます。まず、中心Oと接点Pを通る直線を引きます。次に、**点Pを通る直線OPの垂線を作図**すればよいと考えられます。この垂線が接線になるはずです。

実際に作図をしてみると、次のようになります。

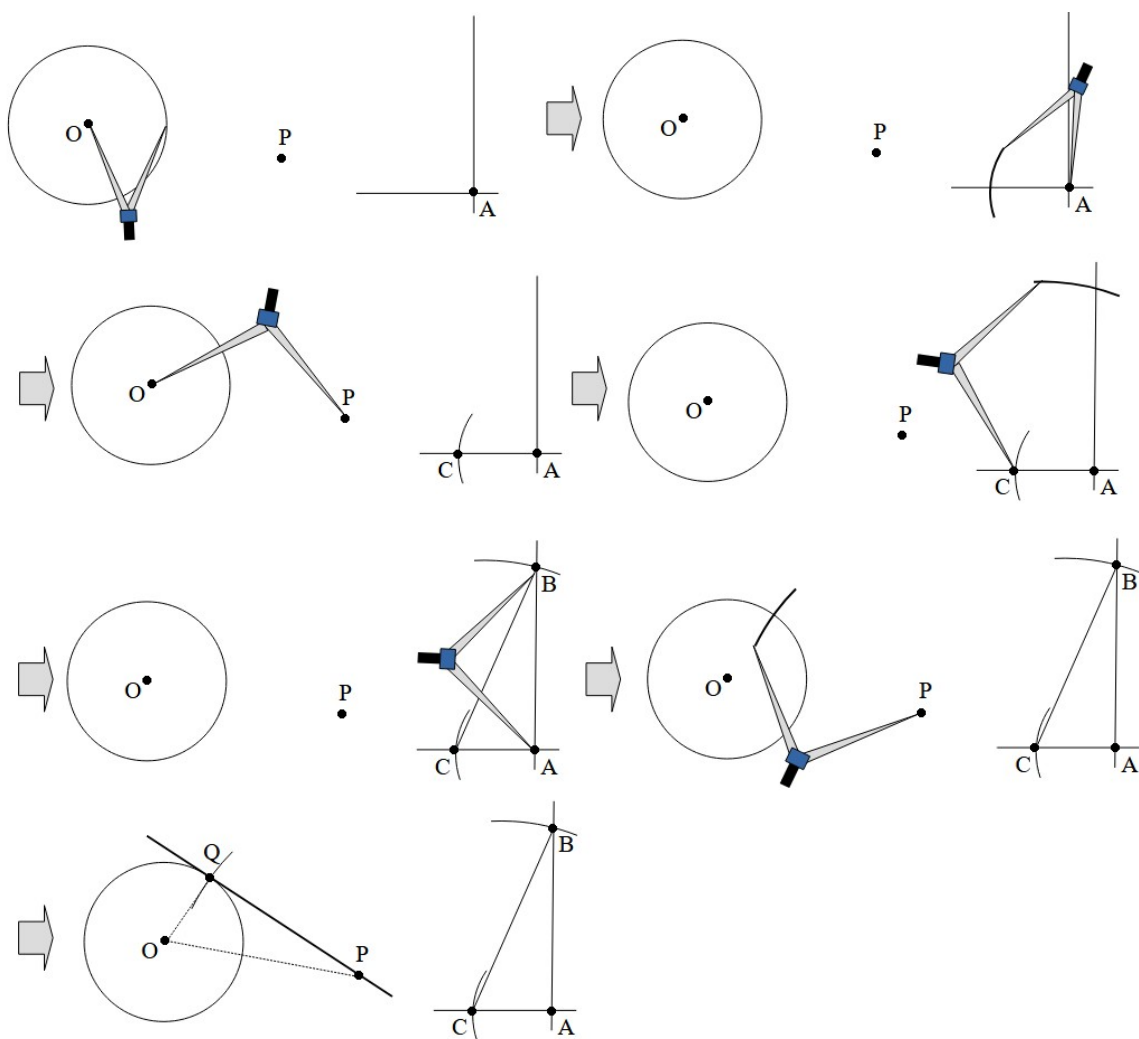




まだわかりませんが、ただ辺  $OQ$  の長さが半径に等しいことはわかります。また、中心  $O$  と点  $P$  の位置はわかっていますから、辺  $OP$  の長さもわかっています。

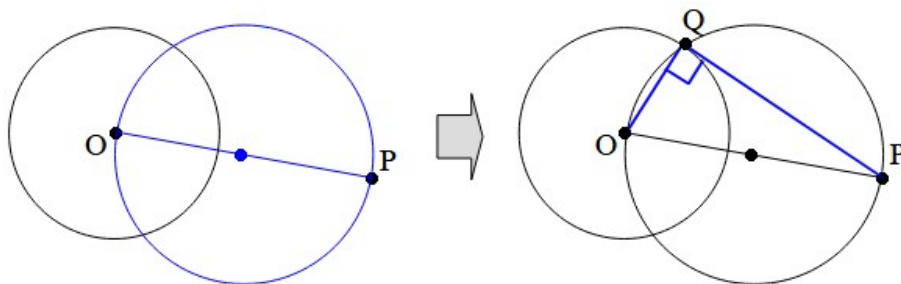
もしも  $\triangle OPQ$  と合同な三角形  $\triangle ABC$  を別の場所に作図できれば、そこから辺  $PQ$  の長さがわかります。したがって、点  $P$  を中心として  $PQ$  の長さを半径とする円弧をかき、もとの円と交わるところに点  $Q$  を作れば、 $\triangle OPQ$  を  $\triangle ABC$  と合同になるようにでき、 $\angle OQP$  も直角にできそうです。

この方針で作図をしてみると、以下のようにになります。最初の図の、点  $A$  のところで垂直に交わる 2 直線は、[垂線の作図](#) を利用して作っておきます。



### 【別の考え方】

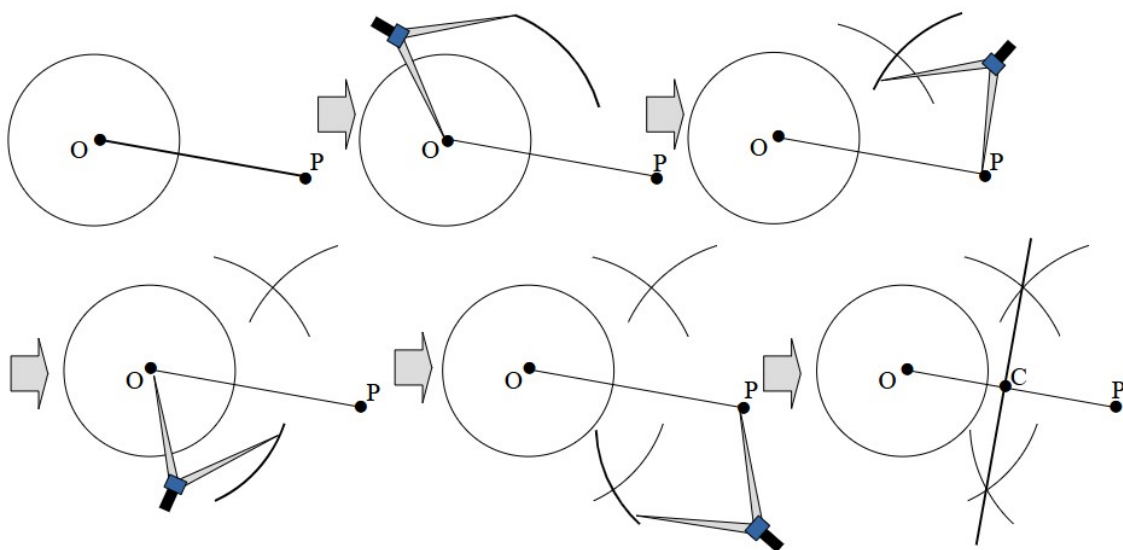
中学校3年生で学習する円周角の考え方を用いると、別の作図の方針も見えてきます。半円の弧に対する円周角は直角になるのです。したがって、線分  $OP$  が直径になるような円がかければ、その円の円周角となるように  $\angle OQP$  を作ると、それは直角となります。



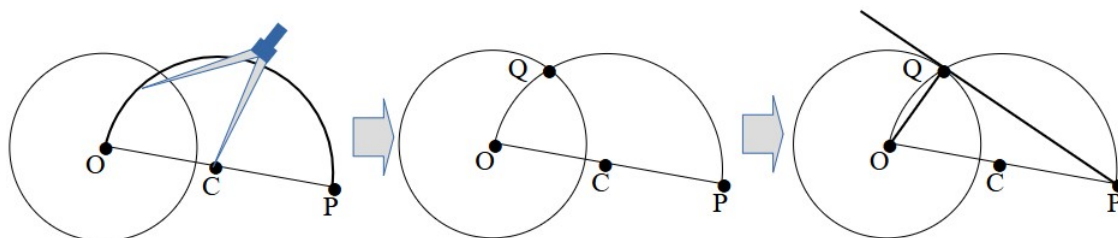
特に点  $Q$  をもとの円の円周上にとることができれば、線分  $OQ$  はもとの円の半径となりますから、直線  $PQ$  は半径に対する垂線、つまりもとの円の接線であるとわかります。

点  $Q$  はもとの円と新しい円の交点として作ればよさそうです。では、線分  $OP$  を直径とする円は、どのようにすれば作図できるでしょうか。それには円の中心が必要ですが、線分  $OP$  の中点が中心になるはずです。そして中点を見つけるには、中学校1年生のとき学習した[垂直二等分線の作図](#)が使えるそうです。

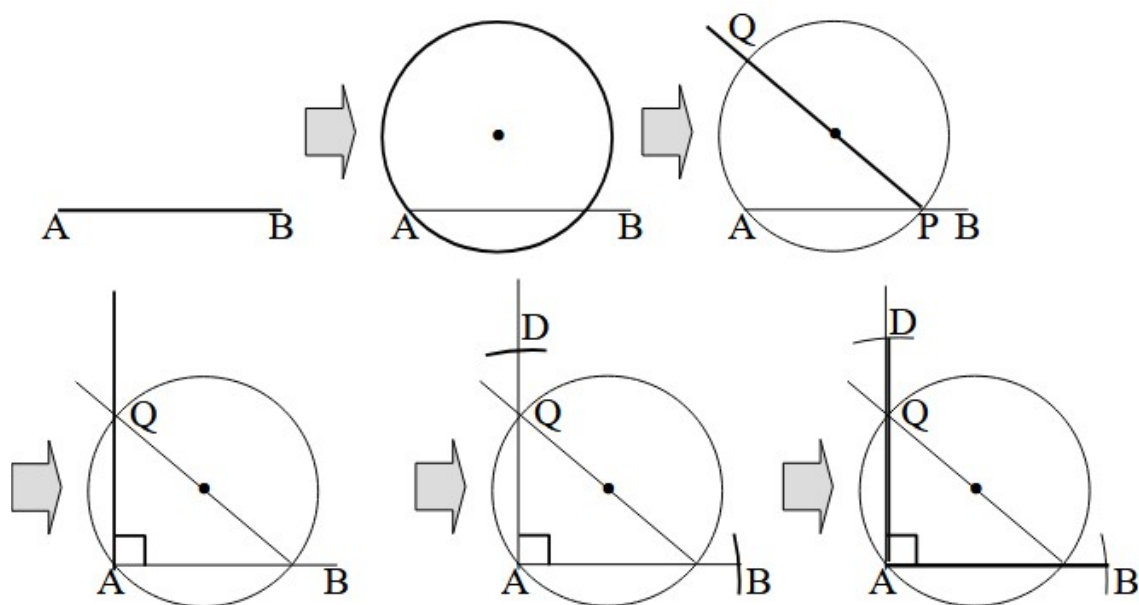
そこでまず、線分  $OP$  の垂直線二等分線を作り、それと  $OP$  との交点  $C$  を作る作図を行うと、以下のようになります。



次に、点  $C$  を中心として半径が  $OC$  (あるいは  $PC$ ) の長さである円弧をかき、それともとの円の交点を作る作図を行うと、以下のようになります。交点  $Q$  が接点になるはずなので、最後に点  $P$  と  $Q$  を結べば、接線を作図することができます。



このように半円に対する円周角を用いると、直角を作図することができます。ここから、例えば、1つの直角を作り、それをもとにひし形を作図すると、下のように正方形を作図することもできます。



点  $A$  を通るように円をかき、上の点  $P$  と円の中心を結ぶと直径ができます。その直径と円が交わるもう一方の点を  $Q$  とすると、 $\angle PAQ$  は半円に対する円周角となるので直角です。

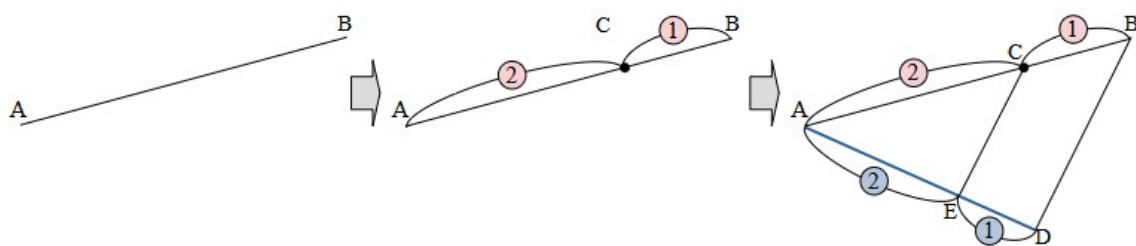
直線  $AQ$  の上に  $AD=AB$  となるように点  $D$  をとると、線分  $AD$  と線分  $AB$  が正方形の2つの辺になります。あとは、この2辺と  $CD$  と  $BC$  が同じ長さになるように点  $C$  をとると、正方形  $ABCD$  を作図することができます。

## 5. 高等学校数学 A の作図

高等学校の数学 A では、中学校第 3 学年で学習したことを生かして、次のような作図を考えることもあります。

### (1) 線分 AB をある比に内分する点

線分 AB があり、これを例えば  $2:1$  に内分する点 C を作図することを考えます。 $2:1$  に内分する点 C がかけたとして、その状態をイメージします。



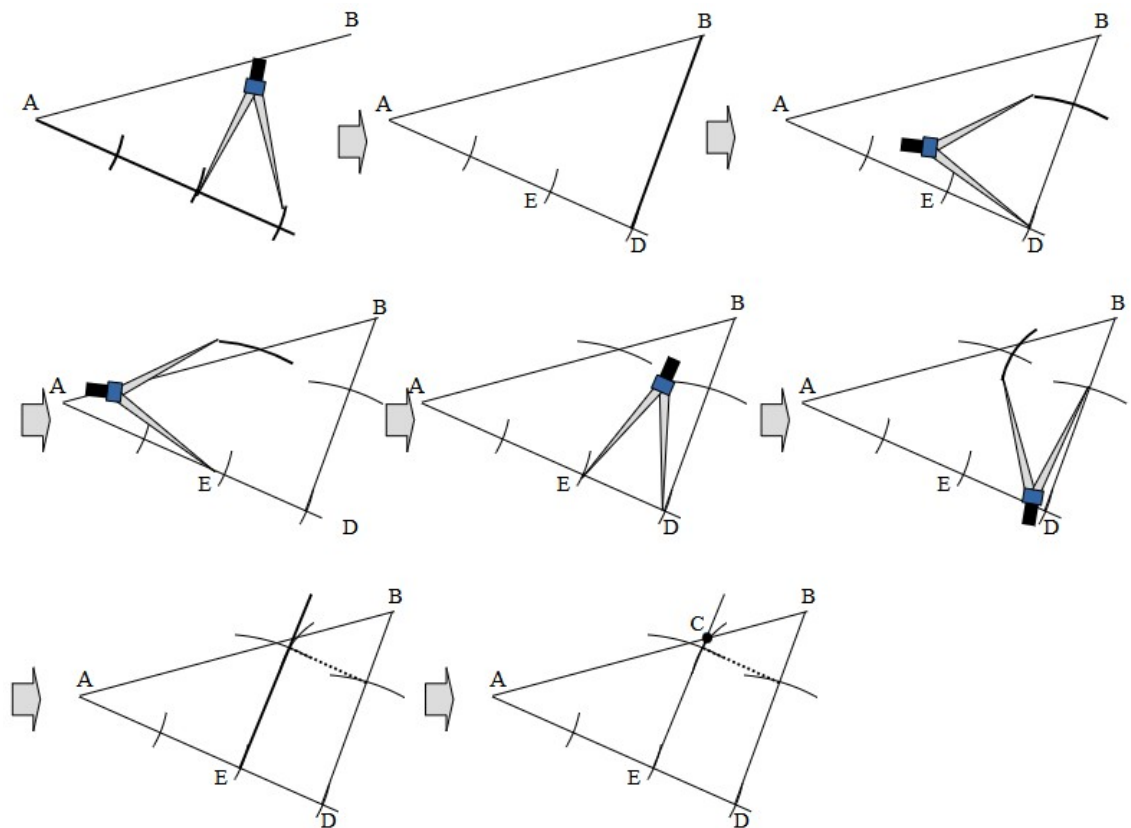
真ん中の状態だけからわかることは思いつきにくいですが、**中学校 3 年生のときに学習した内容**を思い出すと、上の右の図のようにすることができそうです。線分 BD と CE が平行になるようにすると、相似な三角形ができて、 $AC:CB$  の比が、そのまま  $AE:ED$  に移されるのでした。

逆に、 $AE:ED = 2:1$  という状態を作っておけば、同じ平行な線で、その比が線分 AB の方に移され、点 E に対応する点 C が、線分 AB を  $2:1$  に内分するはずです。これが作図のおよその方針となります。

手順にしてみると次のようになるでしょう。

まず点 A を通る直線をかき、その上に等間隔に 3 つの点をとります。2 番目の点を E、3 番目の点を D とすると、 $AE:ED$  は  $2:1$  になっています。次に点 D を点 B と結びます。最後に点 E を通り、線分 DB と平行な線をひき、その線と線分 AB の交点を C とします。上のことから  $AE:ED$  の比が平行線で線分 AB に移されるので、 $AC:CB$  は  $2:1$  となり、点 C が  $2:1$  に内分する点とわかります。

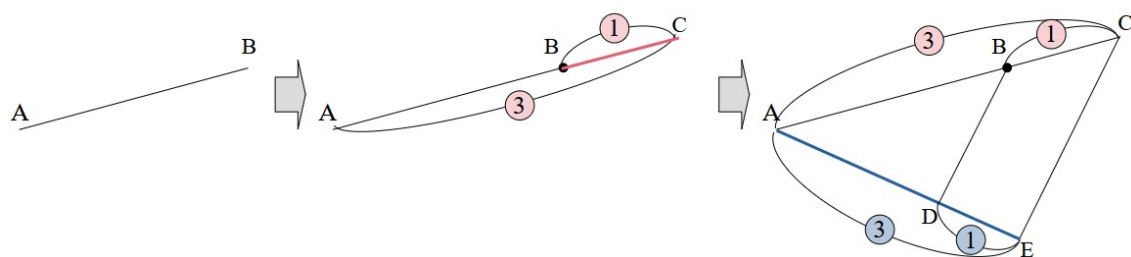
なお平行線をひくには、算数で学習した**1点を通る平行線をひく作図**を用いることができます。下では、**平行四辺形**を用いて平行線を作図しています。



3番目から7番目の図で、**平行四辺形を作図**しています。その平行四辺形の辺を伸ばすことで、線分DBと平行になるように直線ECをひくことができています。

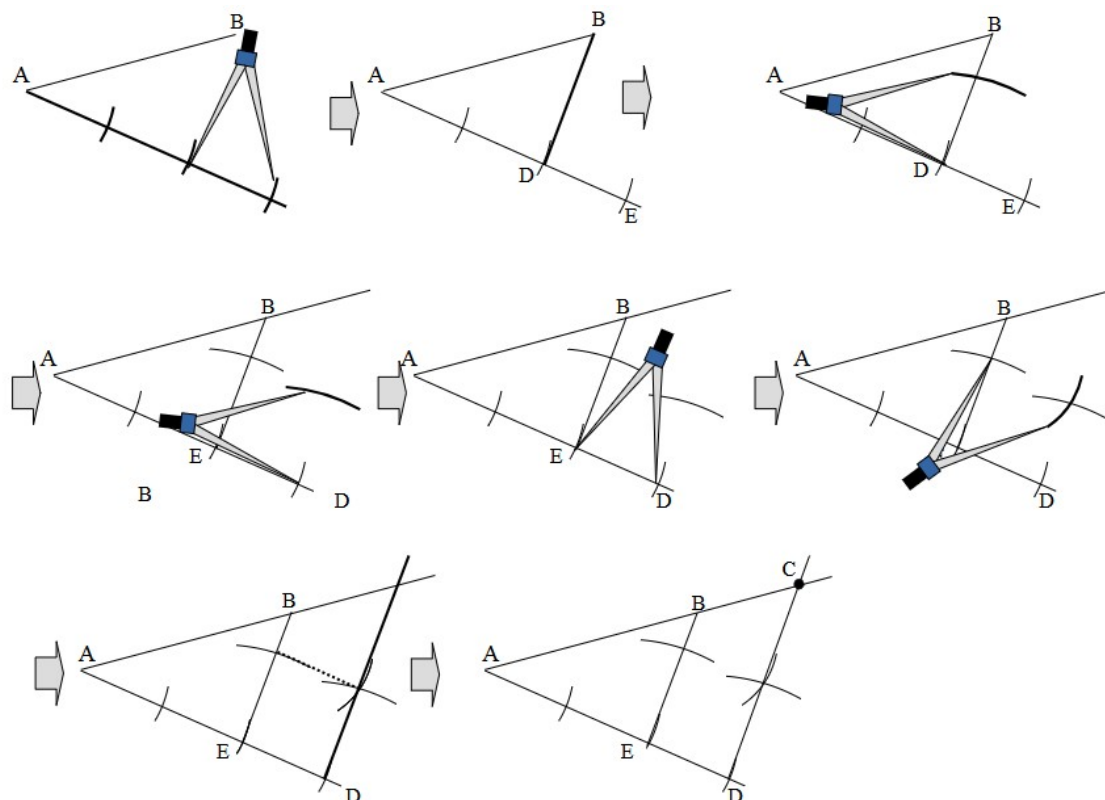
## (2) 線分ABをある比に外分する点

今度は線分ABを3:1に外分する点を作図することを考えます。3:1に外分する点Cがかけたとして、その状態をイメージすると、内分の場合と同様、右の図のようにすることができます。



ここから、内分の場合と同じように、まず  $AE : DE = 3 : 1$  となるように適当に点 D と E を作り、次に、線分 EC が線分 BD と平行になるように、点 C を線分 AB の延長上に作れば、点 C が線分 AB を  $3 : 1$  に外分する点になりそうです。

そこで次のように作図を試みます。今回は、先にひく線分 BD が、点 A に近い方の線分であるということが、内分の場合とは異なっています。



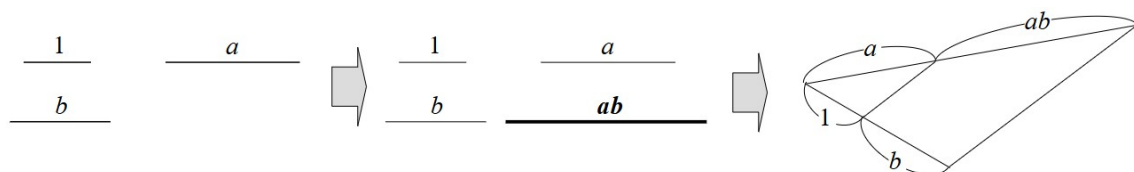
ここでも、3 番目から 7 番目の図で、平行四辺形を作図しています。点 D を含む方の辺を伸ばし、線分 AB を延長した直線との交点を作ると、それが求める点 C になっています。線分 EB と DC が平行になるので、 $AD : ED$  の比が、そのまま  $AC : BC$  に移されるからです。

### (3) 2 つの長さの積の作図

基準の長さ 1 のほかに 2 つの長さ  $a$  と  $b$  が示されているときに、その積  $ab$  を作図することを考えます。基準の長さの  $a$  倍の長さ  $a$  と  $b$  倍の長さ  $b$  から、基準の  $ab$  倍の長さの線分を作図する、ということです。

もちろん、縦の長さが $a$ 、横の長さが $b$ の長方形を作れば、その面積は $ab$ になります。しかしここでは、面積ではなく長さが $ab$ であるような線分をかくことを考えているので、これでは目的は達成されません。

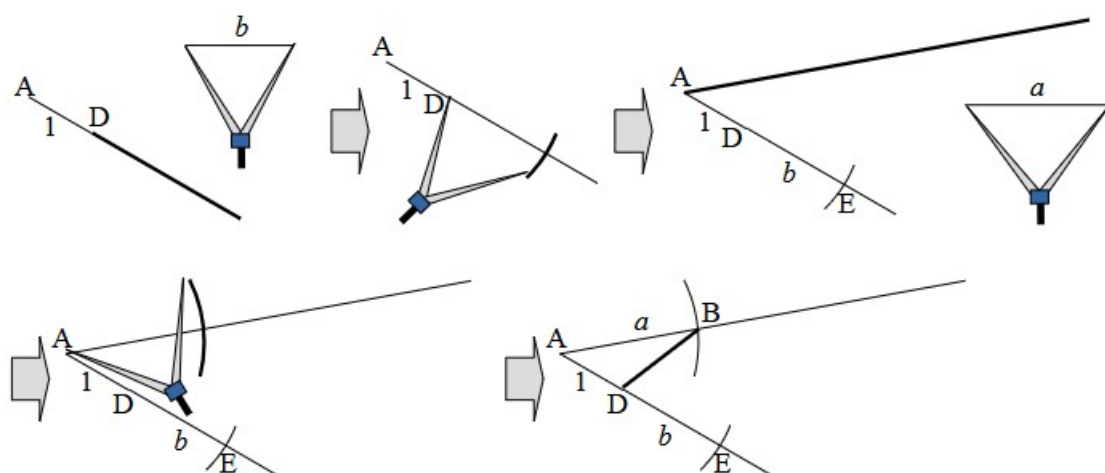
基準の長さ1、2つの長さ $a$ と $b$ を用いて積 $ab$ がかけたとして、その状態をイメージしてみます。ここで $ab$ は $a$ の $b$ 倍ですが、 $b$ も1の $b$ 倍であることに注意します。つまり、どちらの組み合わせでも、2つの線分の比が $1:b$ になっています。したがって、 $ab$ も含めた4つの線分で、下の右の図のような内分点のときと同じ図を作ることができるはずです。

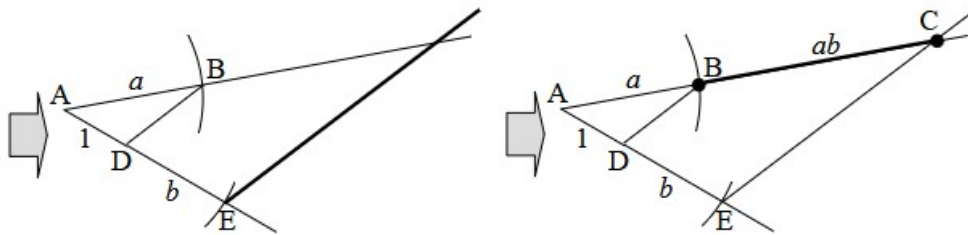


そこで、前に考えた内分点の作図と同じように、 $1:b$ の状態を作っておいて、平行線でその比を移すという方針が見えてきます。手順としては次のようになるでしょう。

長さ1と $b$ の線分をつないで、 $1:b$ の比を作り、その比を平行線を用いて移します。その際、1の部分の部分が $a$ の部分と対応するようにしておくことで、 $b$ に対応する部分がその $b$ 倍の $ab$ の長さになるようにします。

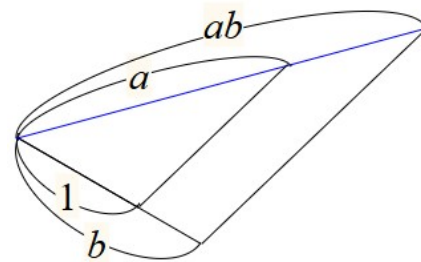
この手順にしたがうと、次のような作図をすることができます。





6 番目の図では、点Eを通して線分DBに平行な直線を作図しています。また、もちろん、 $1:b$ の代わりに $1:a$ の比を先に作っても、同じように作図できます。

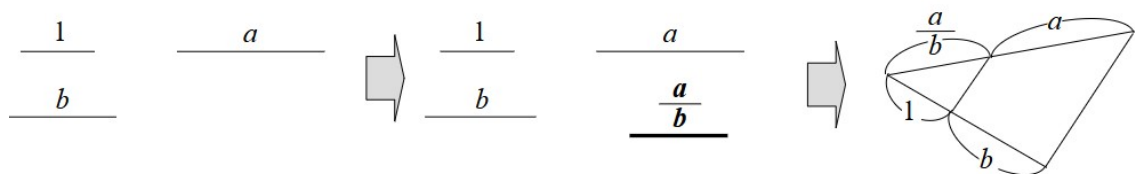
なお中学校3年生で学習した平行線と比の関係のうち、別のタイプの関係を用いると、右のような状態も考えられます。この状態を目指して積の作図をすることもできます。ただしこの作図では、 $b$ が1より小さい場合では、点DとEの位置が入れ替わることになります。



#### (4) 2つの長さの商の作図

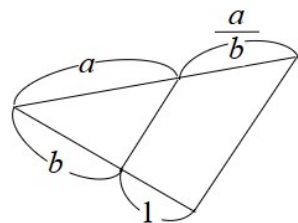
基準の長さ1のほかには2つの長さ $a$ と $b$ が示されているときに、その商 $\frac{a}{b}$ を作図することを考えます。つまり基準の $a$ 倍の長さ $a$ と $b$ 倍の長さ $b$ を用いて、基準の $\frac{a}{b}$ 倍の長さを作図するという事です。

基準の長さ1、2つの長さ $a$ と $b$ を用いて商 $\frac{a}{b}$ がかけたとして、その状態をイメージしてみます。ここで $a$ が $\frac{a}{b}$ の $b$ 倍であるにとらえると、積の作図を考えたように、1と $b$ で $1:b$ の比を作り、これを平行線で移す、という方針が考えられます。そして、 $b$ に対応する部分が $a$ になるようにしておけば、1に対応する部分が $\frac{a}{b}$ になるはずです。



ただこの右の図のような形で作図をしようとする、1と $b$ の方はすぐに作図できますが、上側の方は $\frac{a}{b}$ がまだわかっていないので、その長さをとることができません。またそのため $a$ の位置も決まりませんから、 $a$ の長さも作図することができません。

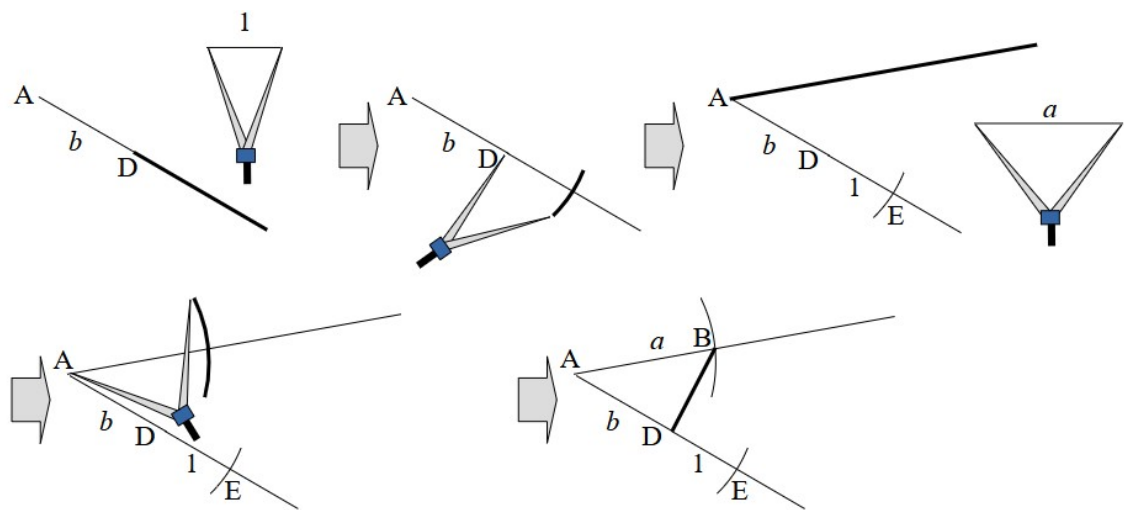
そこで上側で長さのわかっている $a$ を先にとることができるように、 $1:b$ の比の代わりに $b:1$ の比を作ることにします。これで右図のようになりますから、 $a$ の長さを作図することができ、 $b$ の部分と結ぶことで、平行の基準になる線分も作図することができそうです。

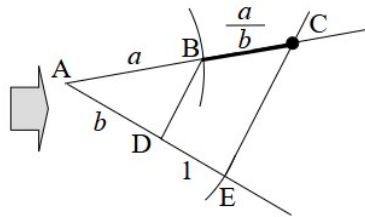
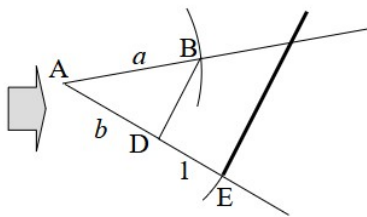


以上のことから、 $b:1$ の比を作っておき、それを平行線で移すという作図の方針が見えてきます。手順は次のようになるでしょう。

長さ $b$ と1の線分をつないで、 $b:1$ の比を作り、その比を平行線を用いて移します。その際、 $b$ の部分が $a$ の部分と対応するようにしておくことで、1に対応する部分がその $\frac{1}{b}$ 倍の $\frac{a}{b}$ の長さになるようにします。

この手順にしたがうと、次のような作図をすることができます。





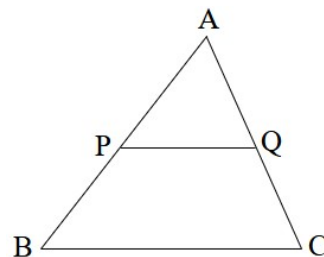
ここでも 6 番目の図では、点 E を通って線分 DB に平行な直線を作図しています。もちろん  $b : 1$  の代わりに  $a : 1$  の比を最初に作っても、同じように作図ができます。

### (5) 長さ $a$ の平方根

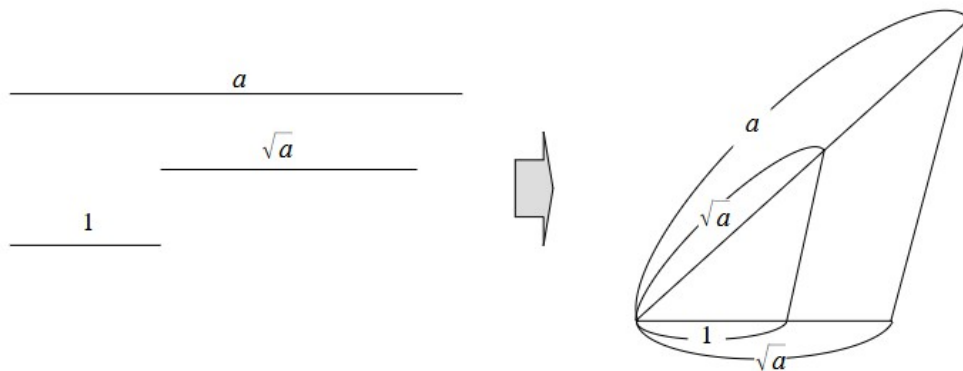
基準の長さ 1 とある長さ  $a$  が示されているときに、その平方根  $\sqrt{a}$  を作図することを考えます。つまり、基準の  $a$  倍の長さの線分を用いて、基準の  $\sqrt{a}$  倍の長さの線分を作図するということです。

今、 $\sqrt{a}$  の長さがかけたとして、その状態をイメージしてみます。2 つの数の積を作図したときのように、線分の比の組み合わせを考えると、基準の長さ 1 と  $\sqrt{a}$  の比は  $1 : \sqrt{a}$  ですが、長さ  $\sqrt{a}$  と  $a$  の比も  $1 : \sqrt{a}$  になることに気づきます。

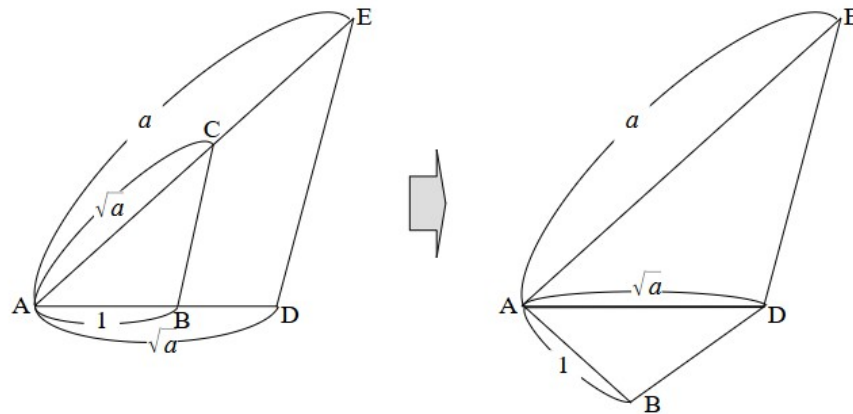
さらに中学校 3 年生の学習を思い出すと、右のような場面で  $PQ \parallel BC$  のときは、内分の場合のように  $AP : PB = AQ : QC$  となるだけでなく、外分の場合のように  $AP : AB = AQ : AC$  ともなるのでした。



これらのことから、今、 $\sqrt{a}$  の長さがかけたとして考えると、下のような状態を作ることができるはずです。

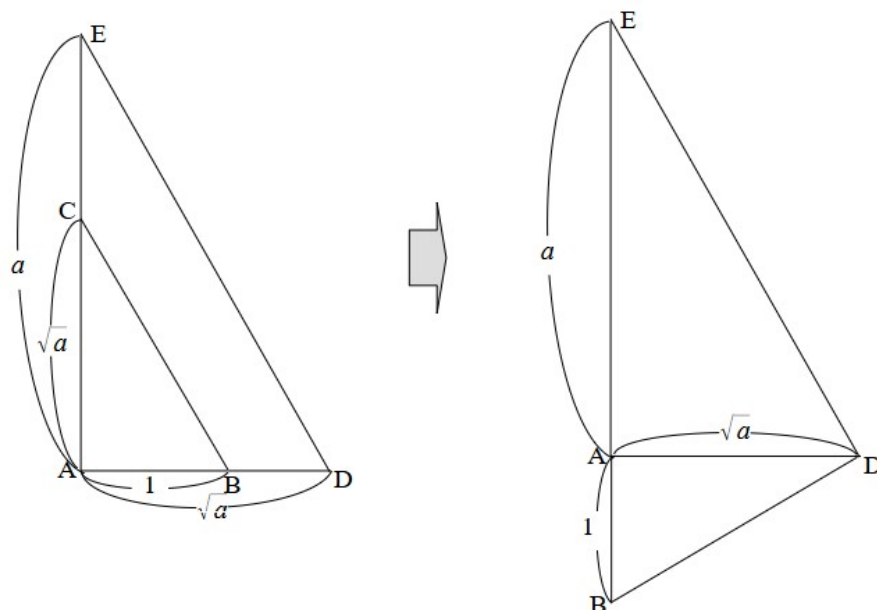


ただこの状態ですと $\sqrt{a}$ が2カ所に出ています。 $\sqrt{a}$ は、実際にはこれから作図したい長さですから、できれば1カ所にまとめておきたいところです。そこで、2つの $\sqrt{a}$ をくっつけて1つにすることを考えます。 $\triangle ABC$ を動かし、辺ACが辺ADと重なるようにしてみます。



$\sqrt{a}$ は1カ所になりましたが、BDやEDの長さがわからないので、まだ作図についての情報は入手しにくそうです。確かに相似の関係からEDの長さがBDの長さの $\sqrt{a}$ 倍ということはわかります。しかし、それだと $\sqrt{a}$ が再び現れてしまうので、その関係を利用するのは避けたいところです。

情報を入手しやすくするために、全体の形を特徴的なものにしてみます。最初の図で $\angle DAE$ の大きさは決まっておらず、適当にとることができます。そこでこの角を特徴的な角、例えば直角にしてとってみます。すると、上の図は次のようになります。



$\angle DAE$  を直角にしたので、線分  $AE$  と線分  $AB$  は一直線になり、全体は大きな三角形になることがわかります。また左の図で  $\angle BCA$  と  $\angle ADE$  をたすと  $90^\circ$  になることから、右の図の  $\angle BDE$  も  $90^\circ$ 、つまり直角になることがわかります。全体は直角三角形になっているのです。

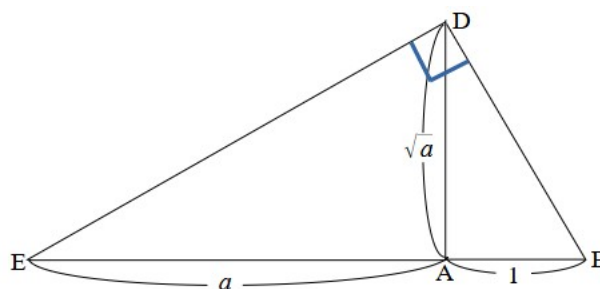
したがって右の図から、次のようなことがわかります。

- ・長さが  $a+1$  の線分  $BE$  で、端から 1 の位置  $A$  に垂線  $AD$  を立てたとき、 $\angle BDE$  が直角になるような  $AD$  の長さを見つけると、その  $AD$  の長さがちょうど  $\sqrt{a}$  になるはずである。

ここから、次のような作図の方針が見えてきます。

- ・まず  $a$  と 1 を合わせて長さ  $a+1$  の線分を作図する。
- ・その線分の端から 1 の位置に線分の垂線を作図する。
- ・垂線の上で、 $\angle BDE$  が直角になるような点を見つける。

$\angle BDE$  が直角になるような点を垂線の上に見つけるのは、すぐにはできなさそうに感じられます。しかしここで、上の右側の図の向きを変えて、下のようにしてみるとどうでしょう。

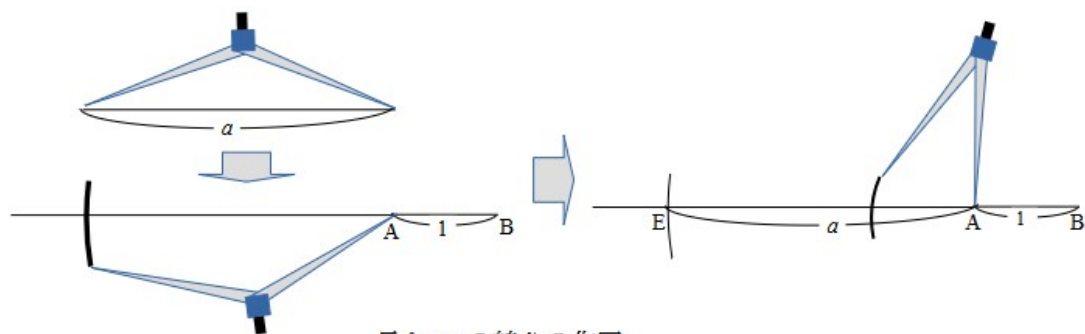


このような図は、円の接線を作図する際に、**半円に対する円周角**を利用するという場面で現れていました。

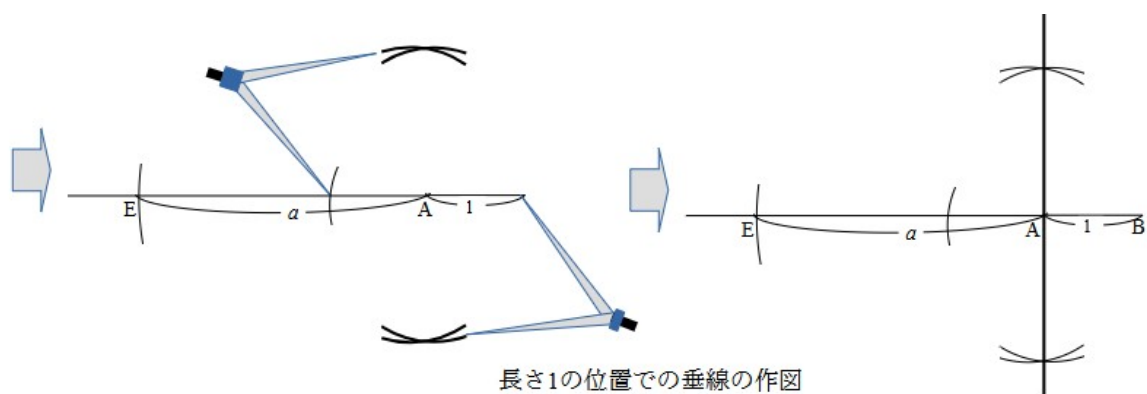
ここから、上の方針を次のように修正することができます。

- ・まず  $a$  と 1 を合わせて長さ  $a+1$  の線分を作図する。
- ・その線分の端から **1 の位置に線分の垂線を作図する。**
- ・線分  $EB$  を直径とする円をかき、垂線との交点を点  $D$  とする。

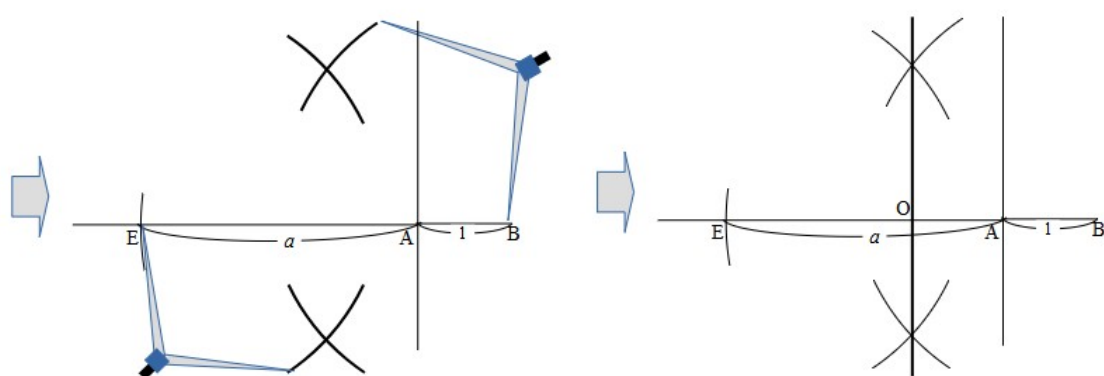
この方針にしたがって作図をしてみると、次のようになります。



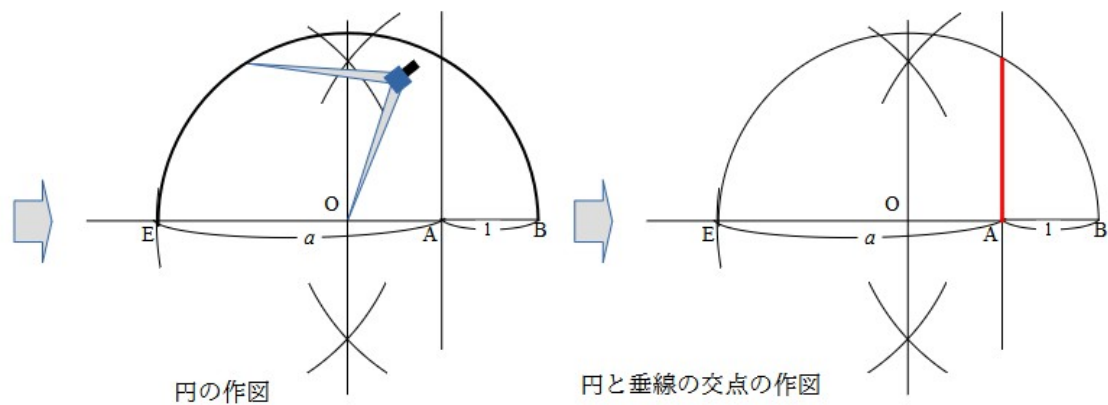
長さ $a+1$ の線分の作図



長さ1の位置での垂線の作図



円の中心を見つけるための垂直二等分線の作図



最後の図で、赤い線分の長さが $\sqrt{a}$ を表しています。

作図の手順だけを説明している場合や、その作図で平方根ができる理由までを説明している場合が多いかと思います。しかし、内分や外分の作図のもとにもなっていた、平行線で比を移すというアイデアをもとに平方根の作図を考えると、その作図を思いつくまでの筋道も少し見えてきます。

## 6. おわりに

作図はいくつかの学年にまたがって現れるのに加えて、図形についての単元の一部として現れることが多いので、その大きな流れを見通すことがしにくいかもしれません。ここまで行ってきたように、算数で現れる作図から高等学校の数学で扱われる作図までを通して見てみると、小学校での正三角形の作図や平行四辺形の作図、合同な三角形の作図から、自然に発展してその後の作図が生まれてきていることがわかります。

他方で、円周角の性質や、平行線と比の関係などを学習して、それらを利用することで作図の可能性が広がることもありました。円周や平行線を作図する部分では算数で学習した作図を用いているのですが、円周や平行線をかくと目指すゴールにたどり着きそうだという見通しを立てる部分では、新しく学習したことが大きく役立っていました。

最初に確認したように、作図は基本的には同じ長さを作ることをくり返してゴールを目指しますので、作図の各ステップだけを見ると、算数で学習した作図になっています。ただ「どのような」同じ長さを作るべきか、という見通しを持つ部分では、図形について学習した他の知識が助けになってくれています。

すでに学習したことや見いだした作図の仕方を利用しながら、同じ長さを作ることをくりかえしてゴールを目指すという、作図を一種のゲームとしてとらえると、作図に対する見方も変わるかもしれません。また最初にも書きましたように、このゲームで求められる発想は、図形の他の学習や方程式の学習、さらに数学の学習全般で必要となる発想にも似ています。作図をそうした発想を練習する場としてとらえると、作図を自分なりに楽しんだり“味わったり”することで、数学の学習全体に関わる発想に近づけるかもしれません。