かなりわりきった

わり算学び直しテキスト

上越教育大学

布川　和彦

分数のわり算では「ひっくり返してかける」ことをしますが、なぜこうなるのかがよく話題になります。またわり算を使うらしい問題では、何を何でわったらよいのかがゴチャゴチャになったり、そもそもわり算を使っていいのか、それともかけ算にした方がいいのかがわからなくなったりします。

ここでは小学校3年で学習する最初のわり算から、6年で学習する分数のわり算まで、わり算だけをおってみます。さらに中学校や高校の数学であらわれるわり算にもちょっとだけ足をのばしましょう。

その際、次の1つのことだけを基本の考えとして、わり算をわりきって確認してみます。

「わり算はかけ算の逆である。」

実はこれだけで、算数で学習するわり算はとりあえずわかるはずです。そしてまた、これだけで中学校の負の数のわり算や、無理数のわり算、さらには高校の複素数のわり算や多項式のわり算にもつなげていくことができます。

目　次

わり算はかけ算の逆

かけ算は、同じ個数を何倍かした個数や、同じ量（長さ、重さ、金額等）を何倍かした量を求める計算でした。リンゴが3個のった皿が5枚あったとすると、全部のリンゴの個数は3個の5倍になるので、3×5＝15で全部の個数を求めることができました。2 mの長さのリボンを7本つなぎあわせてできる長いリボンの長さは(つなぎ目の部分は少し目をつぶるとして)、2 mの7倍の長さなので、2 ×7=14で全体の長さを求めることができました。

わり算は、3×5=15というかけ算の3や5がわからないときに、それがいくつかを考える計算です。つまり、□×5＝15となる□を求めたり、3×△＝15となる△を求めたりします。ここから、わり算はかけ算の「逆」といえます。

□×5＝15となる□を求めることは、5倍したら目標の数(今の場合は15)になる数を求めることです。つまり5倍する基準の大きさを求めることです。

3×△＝15となる△を求めることは、基準の数3を何倍したら目標の数になるかを求めることです。

わり算を個数や人数、長さ、重さ、金額などの場面で使うときには、基準の量を求めたいのか、それとも何倍するのかを求めたいのかを考える必要があります。しかし計算をするときには、どちらかを気にする必要はありません。かけ算では2つの数を入れかえても答え(積)は同じになりました。ここから□×5＝15となるような□については、5×□＝15にもなっているからです。

では□×5＝15となる□はどうやってみつけるでしょう。かけ算九九で求めることになります。何に5をかけたら15になるかと考えて、「二五じゅう、三五じゅうご、あ15だ」として□が3になることをみつけます。そこで

□×5＝15となる□は3 → 15÷5＝3

となります。

3×△＝15となる△もおなじようにみつけます。3に何をかけたら答えが15になるかをかけ算九九で考えて、「三一がさん、三二がろく、…」とやっていくと、「三五じゅうご」となるので、△が5になることをみつけます。そこで

3×△＝15となる△は5 → 15÷3＝5

となります。

　このようにわり算 15÷5 や 15÷3 の答えは、□×5＝15 の□や 3×△＝15 の△に数を順に入れていって、答えが 15 になる□や△をみつけていることになります。この見つけ方の点でも、わり算はかけ算の「逆」になっています。

基本の考え
　わり算はかけ算の「逆」を考えること
　・●÷★ は□×★＝●となる□や、★×△＝●となる△を求めること

わり算と「わける」

　12 個のあめを 4 人に等しくわけるとします。
　この場面を思い浮かべて、わけ終わったようすをイメージしてみましょう。すると、4 人の人がそれぞれ同じ個数のあめをもっているでしょう。ただ個数がいくつかはわからないので、これを□個と表してみます。すると、□個のあめの集まりが 4 セットありますから、全部の個数は□個の 4 倍になります。そこで

□×4＝12

となります。ここから□は 12÷4 で求まることがわかります。

　12 個のあめを 4 個ずつ等しくわけると、何人にわけられるかを考えます。
　また、わけ終わったようすをイメージしてみます。すると、4 個ずつあめをもらった人が何人かいるでしょう。ただ人数が何人かはわからないので、これを△人と表してみます。すると、4 個のあめの集まりが△セットありますから、全部の個数は 4 個の△倍になります。そこで、

4×△＝12

となります。ここから△は 12÷4 で求まることがわかります。

　わけ終わったあとのようすをイメージすることで、わける場面もかけ算で表すことができ、したがって必要な情報をわり算で求められることがあります。

【かけ算九九が苦手な人へ】　さわれる九九表

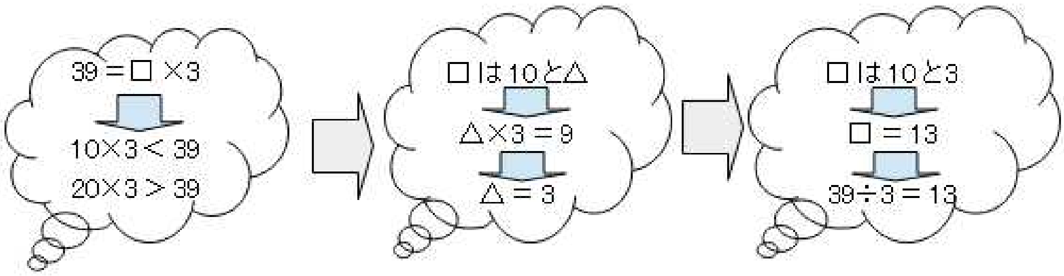
九九をこえるわり算（１）：１けたの数でわるわり算

わり算の答えを「商」といいます。商を求めるとき、ここまではかけ算九九を使うことを考えてきました。しかし、39÷3 や 72÷6 のときは、九九をさがしても 3 をかけて 39 になる九九はみつかりませんし、6 の段の九九をさがしても 72 になる九九はありません。このようなわり算はどうしたらよいでしょう。

このときもまずはかけ算としてとらえ直してみます。

39÷3 の商は 3 倍して 39 になる数となります：39＝□×3。

10 を 3 倍すると 30 なので、あと 3 倍して 9 になる数をみつければ、10 とあわせて商になりそうです。3 倍して 9 になる数なら、九九で 3 と求まります。最初の 10 とこの 3 をあわせて、13 を商にすると、3 倍したときに 39 になりそうです。



確かめてみると、13×3＝10×3＋3×3＝30＋9＝39 で、確かに 13 を 3 倍すると 39 になりました。まとめると次のようになります。

□×3＝39 となる□は 13 ⟶ 39÷3＝13

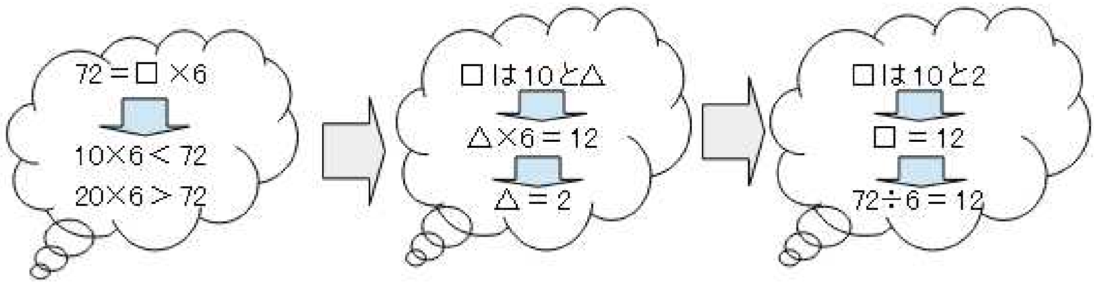
では 72÷6 の商はどうなるでしょう。

このときも、6 倍して 72 になる数を見つけます：72＝□×6。

10 の 6 倍は 60 で小さすぎますが、20 の 6 倍は 120 で大きすぎます。そこで、商は 10 といくつかです。10 の 6 倍は 60 なので、72 にはあと 12 が必要です。そこで、6 倍して 12 になる数をみつけます。これは九九で 2 と求まります。最初の 10 とこの 2 をあわせて、12 を商にすると、6 倍したときに 72 になりそうです。

確かめてみると、12×6＝10×6＋2×6＝60＋12＝72 で、確かに 12 を 6 倍すると 72 になりました。まとめると、次のようになります。

□×6＝72 となる□は 12 ⟶ 72÷6＝12



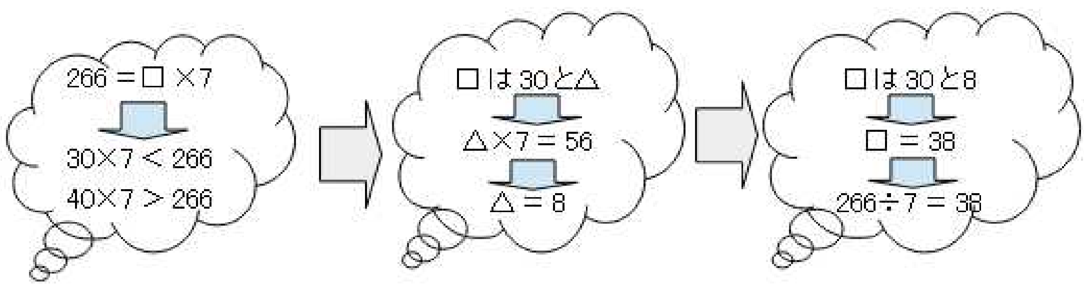
では、92÷4 の商も同じように求めてみましょう。今度は 20 を 4 倍すると 80 でまだ小さすぎ、30 を 4 倍すると 120 で大きすぎるので、商は 20 といくつかです。20×4＝80 だと 92 にするにはあと 12 が必要ですが、4 倍して 12 になるのは 3 ですから、商はさっきの 20 とこの 3 をあわせて 23 となります：92÷4＝23。

わられる数がもう少し大きい場合を考えてみましょう。

266÷7 の商を求めてみましょう。

このときも考え方は同じです。7 倍して 266 になる数、つまり 266＝□×7 となる□を求めます。

30 を 7 倍すると 210 なので、266 には小さすぎますが、40 を 7 倍すると 280 で 266 には大きすぎます。そこで、商は 30 といくつかになりそうです。ただ 30 の 7 倍は 210 なので、266 にあと 56 必要です。そこで、7 倍して 56 になる数をみつければ、30 とあわせて商になりそうです。7 倍して 56 になる数なら、九九で 8 と求まります。最初の 30 とこの 8 をあわせて、38 を商にすると、7 倍したときに 266 になりそうです。



確かめてみると、38×7＝30×7＋8×7＝210＋56＝266 で、確かに 38 を 7 倍すると 266 になりました。まとめると次のようになります。

□×7＝266 となる□は 38 → 266÷7＝38

わられる数が大きくなり、かけ算九九だけで商が求められないときでも、「わる数をかけるとわられる数になる数をみつける」という考え方は同じです。わる数をかけるとわられる数と同じになる数はすぐにはみつからないかもしれません。そのとき、まず最初は、「わる数をかけるとわられる数に**近くなる**数」をさがしましょう。

九九をこえるわり算（２）：２けたの数でわるわり算

今度は、わる数の方も大きくしてみます。

204÷34 を考えてみます。

この商は 34 倍すると 204 になる数です：204＝□×34。

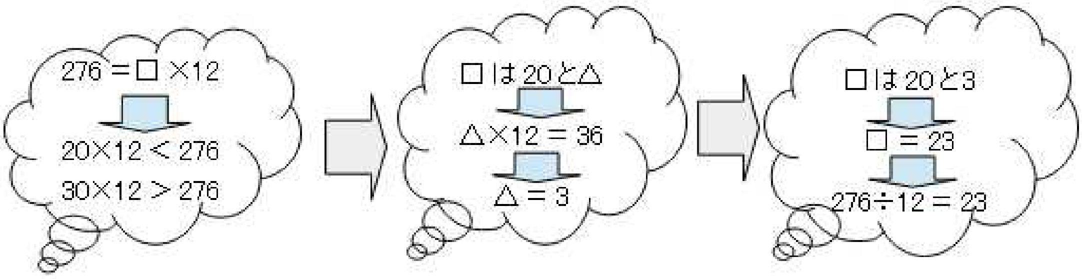
6×30=180、6×40=240 ですから、34 倍したときに 204 になるのは 6 ではないかと見当がつきます。そこで 6×34 を計算してみると、6×34=204 となることがわかります。つまり、34 倍すると 204 になるのは 6 ですから、204÷34＝6 と商が求まります。

□×34＝204 となる□は 6 → 204÷34＝6

では 276÷12 はどうでしょう。

12 倍して 276 になる数をみつけます。10×12＝120、20×12＝240、30×12＝360 ですから、12 倍して 276 になる数は、20 といくつになりそうです。

20×12＝240 だと 276 には、あと 36 必要です。そこで次に 12 倍して 36 になる数を求めます。2×12＝24、3×12＝36 なので、12 倍して 36 になるのは 3 と求まります。そこで、商はさっきの 20 とこの 3 をあわせて 23 になりそうです。



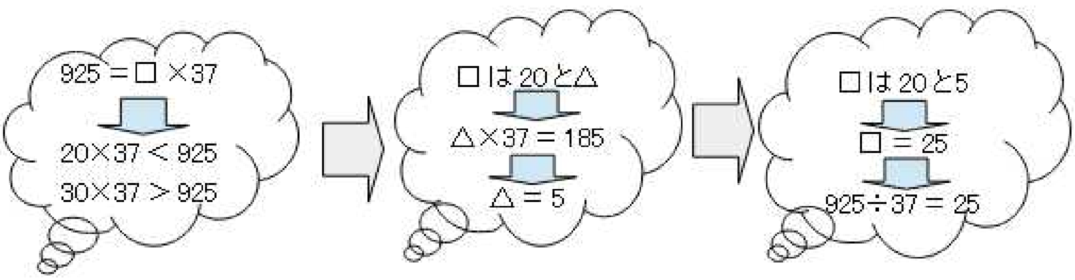
確かめてみます。23×12 を計算すると確かに 276 になります。そこで、23 が商とわかります。

□×12＝276 となる□は 23 → 276÷12＝23

925÷37 も同じように考えてみましょう。10×37＝370、20×37=740、30×37＝1110 ですから、37 倍して 925 になる数は、20 といくつになりそうです。

20×37=740 だと 925 には、あと 185 必要です。そこで次に 37 倍して 185 になる数を求めます。5×30=150、6×30=180、7×30=210 ですから、37 倍して 185 になるのは 6 くらいの数と見当がつきます。

そこでまず 6×37 を計算してみると、6×37=222 となり大きすぎてしまいます。そこで 1 つ小さくしてを 5×37 を計算してみます。すると、5×37=185 となり、37 倍して 185 になる数は 5 であることがわかります。さっきの 20 とこの 5 をあわせて 25 が 925÷37 の商とわかります。



確かめてみると、25×37＝925 となり、確かに 25 を 37 倍すると 925 になります。商は 25 でだいじょうぶそうです。

□×37＝925 となる□は 25 → 925÷37＝25

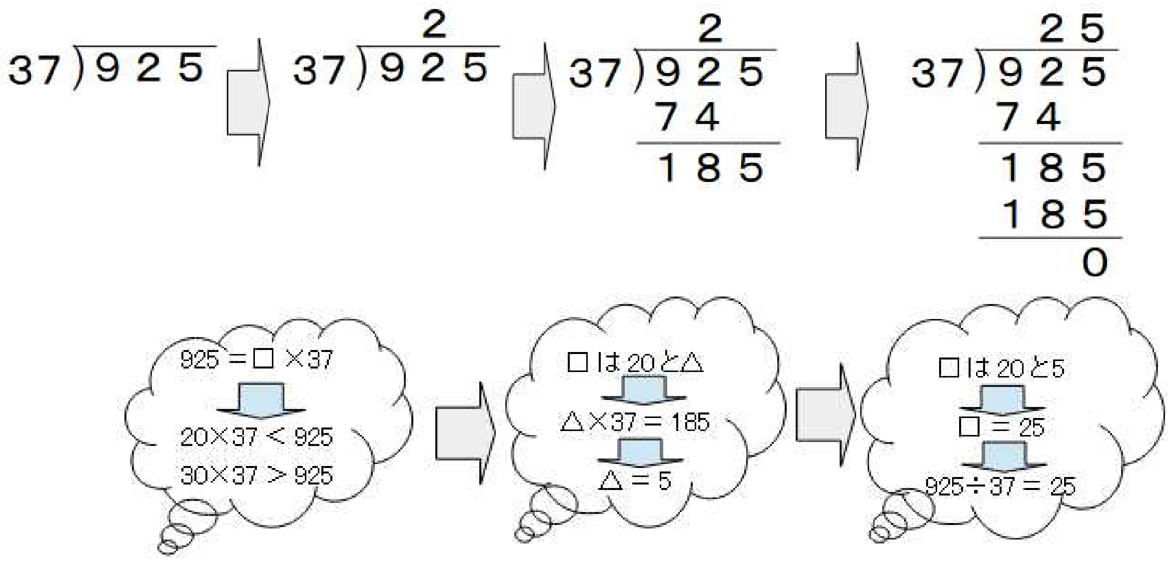
わる数が 2 けたになっても、かけ算はすこしたいへんになりますが、考え方はまったく同じです。

なお、かけ算ではかけられる数とかける数を入れかえても、積は同じでした。ですから、20×37=740 のように 37 倍して 925 に近くなる数を考えても、37 を何倍すると 925 に近くなるかを考えても同じことになります。そのときの数を見て、自分が考えやすい方で考えればよいでしょう。

筆算の考え方

わり算も筆算で計算することができました。ここまで見てきた考え方は、形はちがいますが、実は、筆算の考え方と同じになっています。

最後に考えた 925÷37 を筆算の形ですると、次のようになります。また、その下に先ほどの考え方をのせておきます。



筆算も、それぞれのステップでは、37 倍して目指す数に近くなるような数、あるいは 37 を何倍すると目指す数に近くなるかを、みつけようとしていたのです。また途中でひき算をしていたのは、わられる数にするにはあといくつ必要かを、求めていたことになります。

ですから筆算は、わり算はかけ算の逆として考えをすすめるために、かけ算の途中の結果や、あとどれだけ必要かをメモするための、便利な書き方だととらえておきましょう。

あまりのあるわり算

32÷6の商はどうなるでしょうか。これまでと同じように考えてみると、6倍して32になる数をみつければよさそうです。これをかけ算九九で考えてみると、5×6＝30、6×6＝36ですから、5では小さすぎ、6では大きすぎます。

商を自然数(1、2、3、…という数えるときに使う数)の中でさがそうとすると、6倍してちょうど32になる数はみつからないことになります。このようなときは、大きくなりすぎない数の中でいちばん32にちかくなる数を商として、その6倍だとあといくつ必要かを「あまり」として表します。

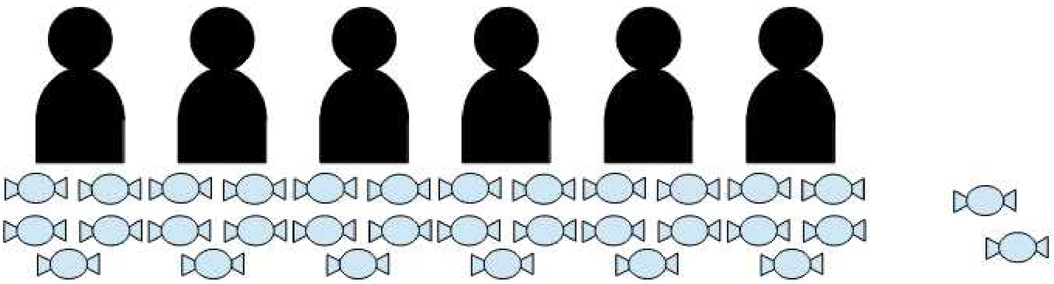
32÷6では6倍して32になる数としては、6だと大きすぎたので、商はそのすぐ前の5となります。また5×6＝30で32にはあと2必要なので、あまりは2となります。

32÷6＝5 あまり 2

逆にいえば、5×6に2をたすとちょうど32になります。

32＝5×6＋2

これを例えば、32個のあめを6人でわける場面で考えてみると、1人に5個ずつ6人にわけて、2個だけあまっていることになります。このイメージから、「あまり」という名前がついています。



953÷37も同じように考えてみます。

まずは37倍して、できるだけ953にちかくなる数をさがします。20×37＝740、30×37＝1110でしたから、商は20といくつかです。20×37＝740だと953まではあと213必要です。37倍して213にちかくなる数をさがします。5×37＝185、6×37＝222ですから、大きくなりすぎない数の中でいちばん213にちかくなる数は5とわかります。

ただ 5×37＝185 では 213 にはあと 28 必要です。しかし 1、2、3、…という自然数の中では、37 倍して 28 になる数も、28 より大きくなりすぎない中で近くなる数もみつけることはできません。

そこで商はさっきの 20 と 5 をあわせて 25 となり、それでもまだ必要な 28 があまりとなります。

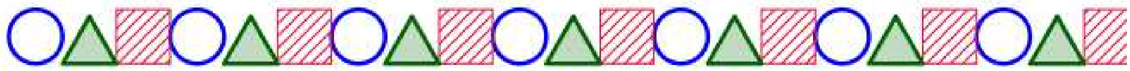
確かめてみます。24×37＝888、25×37＝925、26×37＝962 ですから、37 倍して大きすぎない数の中で 953 にいちばんちかくなるのは、確かに 25 です。

25×37＝925 なので 953 にはあと 28 必要です。そこであまりは 28 となります。

953÷37＝25 あまり 28

953＝25×37＋28

あまりのあるわり算は、たとえばコンピュータのプログラムを書くときにも使われることがあります。下の図は「何番目」の数を 3 でわったときのあまりが 1 なら青い円を、2 なら緑の正三角形を、0 なら、つまりあまりがでないなら赤の正方形をかくように、プログラムを書いてコンピュータにかかせたものです。



このとき「mod(14, 3)」という命令が使われています。mod(14, 3)は 14÷3 を計算したときのあまりを求める命令です。「14」のところを 1、2、3、…に変えると、1 番目、2 番目、3 番目、…のそれぞれについてあまりを求めてくれます。

このようにわり算のあまりは、「3 つおき」や「5 つおき」に同じになるようなきまりを考えるときに使うことができます。

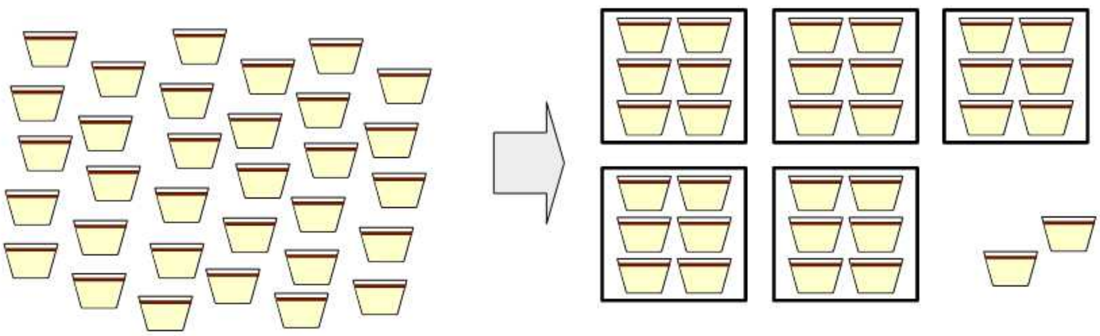
mod(7, 2)や mod(8, 2)は 7÷2 を計算したときのあまりを求める命令ですが、2 でわって 1 あまる数は奇数、0 あまる数、つまりあまりがでない数は偶数ですから、この計算の結果で、それぞれの数が偶数か奇数かを判定できることになります。そこで、mod を使うと数を入力したときに、「奇数」とか「偶数」と表示されるプログラムも作ることができそうです。

あまりのあるわり算の文章題

32 個のプリンを 6 個入りの箱に入れることを考えます。□箱できたとして、6×□が 32 に近くなる□がいくつになるかを求めます。$6\times4=24$、$6\times5=30$、$6\times6=36$ ですから、6×□が 32 に近くなる□は 5 となります。このとき、$6\times5=30$ だと 32 にはあと 2 必要です。そこで商は 5、あまりは 2 となります。

$$32\div6=5 \text{ あまり } 2$$

$$32=6\times5+2$$



このわり算から、箱はいくつ用意すればよいといえますか？

それは、何のために箱に入れるかによります。

もしも 6 個入りの箱で売るためであれば、あまりの 2 個は売れませんから、箱に入れる必要はありません。そこで箱は 5 箱でよいことになります。あるいはさらにプリンを 4 個作って、もう 1 箱作るという方法もあります。

もしも冷蔵庫に入れて保管するためであれば、あまりの 2 個も保管した方がよいでしょうから、あまりの 2 個を入れるための箱も必要となり、箱は全部で 6 箱必要です。ただ保管するだけなら、同じ箱でなくても、2 個だけ入る小さい容器を代わりに用意することもありえます。

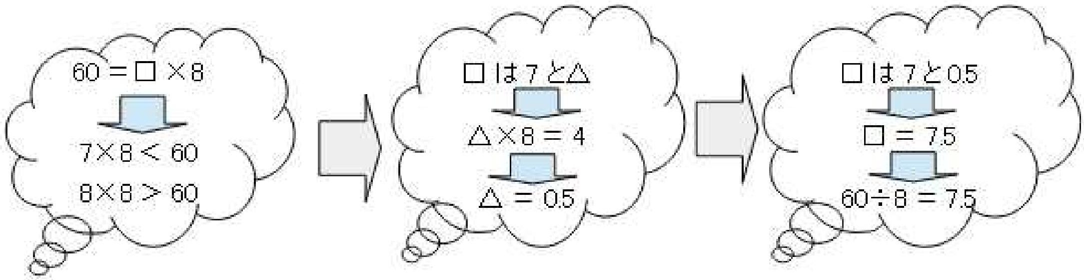
このように、あまりのあるわり算を使う文章題のときは、最後の答えをいくつにするかは、場面によって変わってきます。わり算を計算して商とあまりを求めたら、まずは場面がどのようなようすになっているかを、イメージしてみましょう。その上で、答えはどうしたらよいかを、場面にそって考えてみましょう。最後の答えは算数や計算では決めることができず、わり算を使う人がどうしたいのかより決まるのです。

商が小数になるわり算

60÷8 を計算するには、8 倍して 60 に近くなる数をみつけます。7×8＝56、8×8＝64 なので、8 倍して 60 に近くなる数は 7 とわかります。 7×8＝56 だと 60 にあと 4 必要なので、商は 7、あまりは 4 となるのでした。

でも 8 倍して 60 に近くなる数を自然数だけでなく、小数の中でさがしてもよいことにしたらどうでしょう？ 7×8＝56 だと 60 にあと 4 必要ですから、8 倍して 4 になる数をみつけることができれば、7 とあわせると 8 倍してちょうど 60 になる数を作ることができます。つまり△×8＝4 となる数をみつけると、(7+△)×8＝ 7×8＋△×8＝56＋4＝60 となります。

では 8 倍して 4 になる数、△×8＝4 となる△はあるでしょうか。たとえば 0.1×8＝0.8、0.2×8＝1.6、…と考えていくと、0.5×8＝4 となることにきづきます。そこで、さっきの 7 とこの 0.5 をあわわた 7.5 が商になりそうです。



確かめてみます。7.5×8＝(7＋0.5)×8＝7×8＋0.5×8＝56＋4＝60 となります。まとめると、次のようになります。

60÷8＝7.5

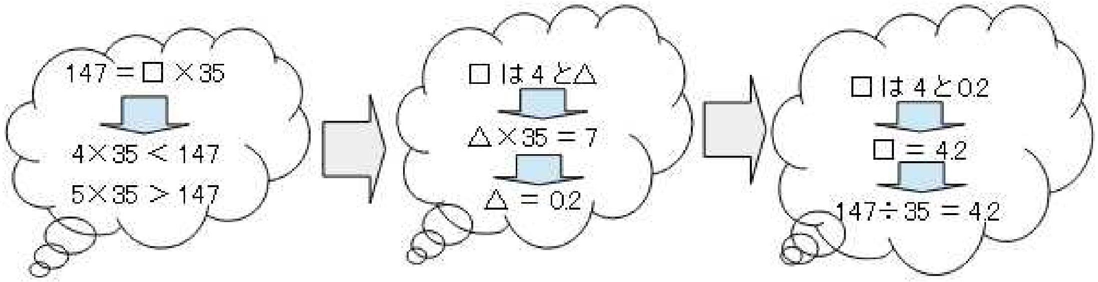
60＝7.5×8

同じように 147÷35 を計算してみましょう。

35 倍して 147 に近くなる数をみつけます。4×35＝140、5×35＝175 なので、商は 4 といくつかになりそうです。ただ 4×35＝140 なので 147 にはあと 7 必要です。そこで、35 倍して 7 になる数をさがします。0.1×35＝3.5、0.2×35＝7 と考えていって 0.2×35＝7 となることにきづきます。そこで、さっきの 4 とこの 0.2 をあわせた 4.2 が商になります。

$$147 \div 35 = 4.2$$

$$147 = 4.2 \times 35$$

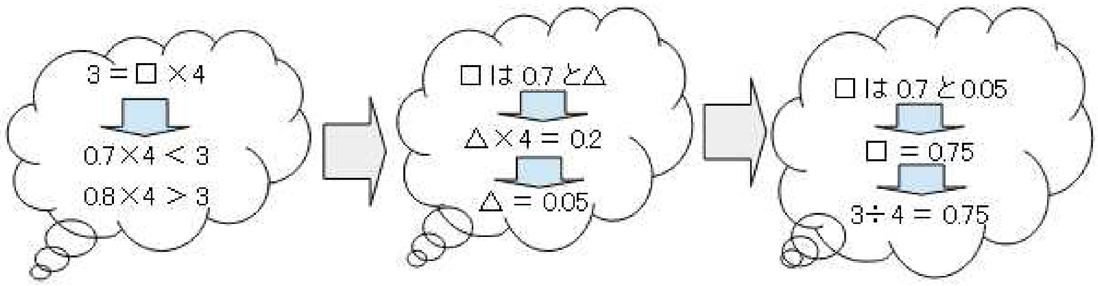


最後に 3÷4 を考えてみましょう。

4 倍して 3 に近くなる数をみつけます。1 以上の数は 4 倍すると 4 以上になるので、1 より小さい数でさがすことになります。0.6×4＝2.4、0.7×4＝2.8、0.8×4＝3.2 なので、商は 0.7 といくつかになりそうです。ただ 0.7×4＝2.8 なので 3 にはあと 0.2 必要です。そこで、4 倍して 0.2 になる数をさがします。0.01×4＝0.04、0.02×4＝0.08、…と考えていって 0.05×4＝0.2 となることにきづきます。そこで、さっきの 0.7 とこの 0.05 をあわせた 0.75 が商になります。

$$3 \div 4 = 0.75$$

$$3 = 0.75 \times 4$$



商が小数になるときは、何倍かする数として 1 より小さい数の中からもさがすことになりますが、考え方としてはこれまでと同じです。「わる数」をかけたときに「わられる数」に近くなる数をさがせばよいのです。

わり算のきまり

わり算には、「わられる数とわる数を同じ倍しても商は変わらない」というきまりがあります。これも、かけ算になおして考えると、よくわかります。

例えば、6÷2＝3 を考えてみましょう。わられる数とわる数を 3 倍すると 18÷6 になりますが、確かに商は 3 で変わりません。わられる数とわる数を 10 倍すると 60÷20 になりますが、20 倍して 60 になる数は 3 ですから、やはり商は変わりません。

6÷2＝3 をかけ算の形で書いてみると 6＝3×2 となります。このとき、かける数の 2 を□倍すると、次のようになります。

$$3\times(2\times\square)=(3\times2)\times\square=6\times\square$$

3 を(2×□)倍すると 6×□になるので、(2×□)倍して 6×□になる数はそのまま 3 でよいことになります。そのため、わられる数とわる数の両方を□倍したときは商は変わらないのです。

$$6\div2=3 \quad \Longrightarrow \quad (6\times\square)\div(2\times\square)=3$$

このあと考える、わる数が小数や分数の場合には、わる数を何倍かすると自然数になおせて、計算しやすくなることがあります。そのようなときは、わられる数も同じだけ倍をしておけば、商は変わらずにすみます。

では、わる数だけ□倍したらどうなるでしょうか。3×(2×□)＝6×□でしたから、わる数を 2×□にしただけだと 6 になりません。このときは 3 の方を÷□しておけば、かけたときに、÷□と×□がうちけしあって、ちょうど 6 になります。

$$(3\div\square)\times(2\times\square)=6$$

つまり(2×□)倍して 6 になる数は 3÷□となります。そこから、6÷(2×□)の商は 3÷□になってしまうことがわかります。

$$6\div2=3 \quad \Longrightarrow \quad 6\div(2\times\square)=3\div\square$$

このように、わる数だけ□倍したときは、もとのわり算の商を÷□した数が出てきてしまいます。

わる数だけを 10 倍したときには、もとのわり算の商を知るためには、えられた商を最後に 10 倍する必要があるのです。

わる数が小数のわり算

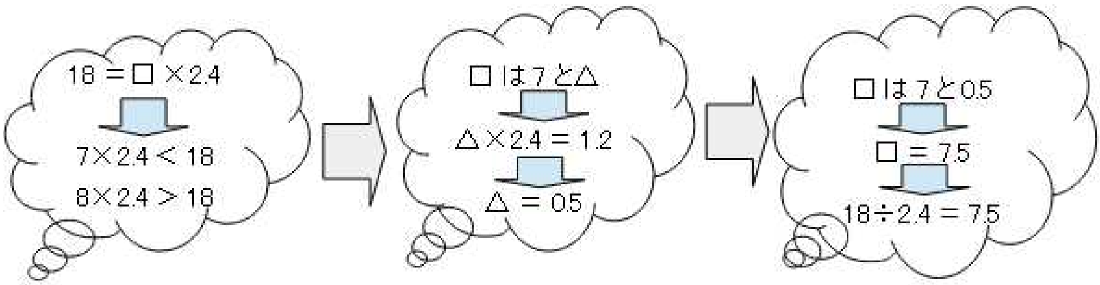
わる数が小数のわり算を考えてみます。

例えば、18÷2.4 の商を求めてみます。

今までと同じように、2.4 倍して 18 になる数をさがします。1×2.4＝2.4、2×2.4＝4.8、…と考えていくと、7×2.4＝16.8、8×2.4＝19.2 なので、商は 7 といくつかになりそうです。ただ 7×2.4＝16.8 なので 18 にはあと 1.2 必要です。そこで 2.4 倍して 1.2 になる数をさがします。1×2.4＝2.4 でしたから、これは 1 より小さい数になります。0.1×2.4＝0.24、0.2×2.4＝0.48、…と考えていくと、0.5×2.4＝1.2 であることがわかります。さっきの 7 とこの 0.5 をあわせた 7.5 が商になります。

18÷2.4＝7.5

18＝7.5×2.4



前のページでやったように、わる数が小数の場合、わる数を 10 倍して考えることもできます。そのときは、わられる数も 10 倍をしておけば、商は変わらないのでした。つまり 18÷2.4 の商と 180÷24 の商は同じはずです。

実際に 180÷24 を計算して確かめてみましょう。180÷24 の商ですから、24 倍して 180 になる数をみつけます。7×24＝168、8×24＝192 なので、商は 7 といくつかになりそうです。ただ 7×24＝168 なので 180 にはあと 12 必要です。そこで 2.4 倍して 12 になる数をさがします。1×24＝24 でしたから、これは 1 より小さい数になります。0.1×24＝2.4、0.2×24＝4.8、…と考えていくと、0.5×24＝12 であることがわかります。さっきの 7 とこの 0.5 をあわせた 7.5 が商ですから、180÷24 の商も確かに 7.5 になっています。

2 つの考え方では、小数点があるかないかの違いはありますが、基本的には同じような計算をしていますので、やりやすい方で考えてだいじょうぶです。

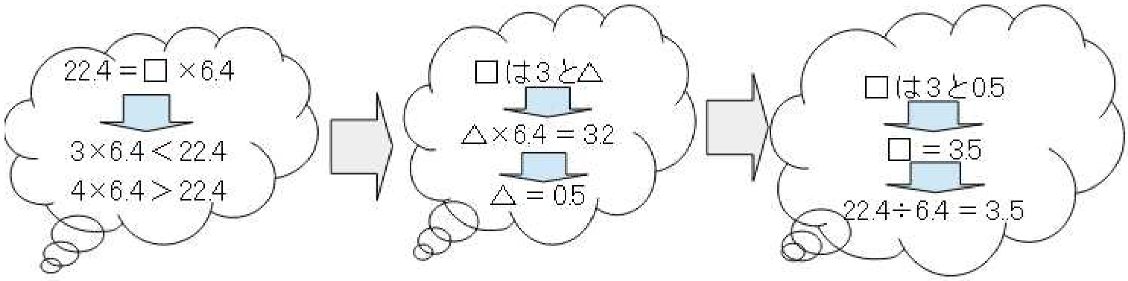
わられる数も小数になったときも、同じように考えてみます。

例えば、22.4÷6.4 の商を求めてみましょう。

6.4 倍して 22.4 になる数をさがします。3×6.4＝19.2、4×6.4＝25.6 なので商は 3 といくつかのようです。ただ 3×6.4＝19.2 だと 22.4 にはあと 3.2 必要です。そこで 6.4 倍して 3.2 になる数をさがします。0.1×6.4＝0.64、0.2×6.4＝1.28、…と考えていくと、0.5×6.4＝3.2 となることがわかります。さっきの 3 とこの 0.5 をあわせた 3.5 が商となります。

22.4÷6.4＝3.5

22.4＝3.5×6.4



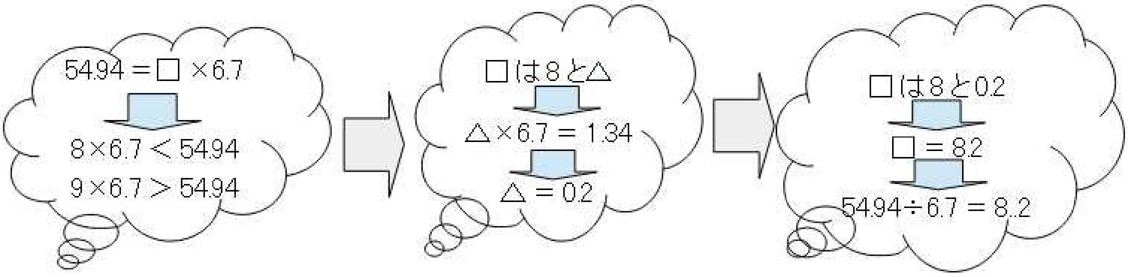
わられる数がもう少しむずかしい 54.94÷6.7 も考えてみましょう。

やはり考え方は同じで、6.7 倍して 54.94 になる数をさがします。8×6＝48、9×6＝54、10×6＝60 ですから、9 あたりではないかと考えて、8 と 9 をそれぞれ 6.7 倍してみます。すると 8×6.7＝53.6、9×6.7＝60.3 なので、商は 8 といくつかであるとわかります。

ただ 8×6.7＝53.6 だと 54.94 にはあと 1.34 必要です。そこで 6.7 倍して 1.34 になる数をさがします。0.2×6=1.2 ですから、0.2 あたりではないと考えて、0.2×6.7 を計算してみると、確かに 0.2×6.7＝1.34 となることがわかります。さっきの 8 とこの 0.2 をあわせた 8.2 が商になります。

54.94÷6.7＝8.2

8.2×6.7＝54.94



小数が入ると計算は少しややこしくなりますが､考え方はまったく同じです。「わる数」をかけたときに「わられる数」になるような数をさがしていけばよいのです。その意味では、わかることをもとにじょじょに犯人をしぼりこんでいく刑事もの、探偵ものと似ています。

また前にも書いたように、わり算を筆算でしているときも、基本的にはこれと同じことをやっています。

分数でわるわり算

　分数のわり算も、基本的な考え方はここまでと同じです。「わる数」をかけたときに「わられる数」になるような数をみつければよいのです。「わる数」をひっくり返してかけるというやり方も、このような数を求めるためのかんたんな方法にすぎません。

　例えば、 $\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}$ を考えてみます。このときも、$\frac{3}{4}$ 倍して $\frac{2}{5}$ になる数をみつければよいのです。この数を $\frac{○}{△}$ としてみます。この数を $\frac{3}{4}$ 倍すると $\frac{2}{5}$ になるのですから、次のようになります。

$$\frac{2}{5}=\frac{○}{△}\times\frac{3}{4}$$

この $\frac{○}{△}$ を求めるには、例えば２つの考え方ができます。

【考え方１】

$\frac{○}{△}\times\frac{3}{4}$ を計算すると $\frac{○}{△}\times\frac{3}{4}=\frac{○\times3}{△\times4}$ となります。ここから、

$$\frac{2}{5}=\frac{○\times3}{△\times4}$$

です。このままの形ではまだくらべにくいので、大きさの同じ分数の考え方を使って、 $\frac{2}{5}$ の分子と分母に 3 や 4 があらわれるような形に変えてみます。

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{2\times3\times4}{5\times3\times4}=\frac{2\times4\times3}{5\times3\times4}$$

これと $\frac{○\times3}{△\times4}$ をくらべると、○＝2×4、△＝5×3 となります。つまり、

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{2\times4}{5\times3}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$$

となり、「わる数」をひっくり返してかけた形になっています。

【考え方２】

2 つ目の考え方では、$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1$ となることを利用します。

$\frac{2}{5}=\frac{○}{△}\times\frac{3}{4}$ の、$\frac{2}{5}$ と $\frac{○}{△}\times\frac{3}{4}$ の両方を $\frac{4}{3}$ 倍してみます。

$\frac{2}{5}$ の $\frac{4}{3}$ 倍は $\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$ です。

$\frac{○}{△}\times\frac{3}{4}$ の $\frac{4}{3}$ 倍は $\left(\frac{○}{△}\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{4}{3}=\frac{○}{△}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{○}{△}\times1=\frac{○}{△}$ なので $\frac{○}{△}$ となります。

これらは等しいはずですから、あわせると

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{○}{△} \qquad \text{つまり} \qquad \frac{○}{△}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$$

となります。そして、$\frac{○}{△}$ は $\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}$ の商でしたから、$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{○}{△}$。つまり、

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$$

となり、【考え方 1】と同じ結果がえられました。

前にわり算のきまりとして、「わられる数」と「わる数」に同じ倍をしても商は変わらないことを確かめました。これを使うと別の考え方もできます。

【考え方３】

$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}$ の「わられる数」$\frac{2}{5}$ と「わる数」$\frac{3}{4}$ の両方を $\frac{4}{3}$ 倍してみます。商は変わらないので、次のようになります。

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\left(\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\right)\div1=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$$

つまり

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$$

となり、やはり【考え方 1】【考え方２】と同じ結果がえられます。

負の数のわり算

負の数のわり算でも、「わる数」をかけると「わられる数」になる数をみつけます。例えば、$-6\div 3$ であれば、3 をかけて-6 になる数、つまり$\square\times 3=-6$ となる$\square$をみつけます。正の数 3 をかけて負の数-6 になるので、$\square$は負の数です。負の数の中で$\square\times 3=-6$ となる$\square$をさがすと、$\square$は-2 であることがわかります。したがって、-2 が$-6\div 3$ の商となります：$-6\div 3=-2 \longleftarrow -2\times 3=-6$。

$6\div(-3)$であれば、今度は-3 をかけて 6 になる数、つまり$\square\times(-3)=6$ となる$\square$をみつけます。さきほどと同じようにして考えると、$\square$は-2 であることがわかり、-2 が $6\div(-3)$の商となります：$6\div(-3)=-2 \longleftarrow -2\times(-3)=6$。

無理数のわり算

$\sqrt{15}\div\sqrt{3}$ の商も、$\sqrt{3}$ をかけて $\sqrt{15}$ になる数です。$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ と、$15=5\times 3$ であることに着目すると、$\sqrt{15}=\sqrt{5\times 3}=\sqrt{5}\times\sqrt{3}$ とわかります。ここから、$\sqrt{3}$ をかけて $\sqrt{15}$ になる数は $\sqrt{5}$ とわかります。したがって $\sqrt{15}\div\sqrt{3}=\sqrt{5}$ 。

$\sqrt{3}\div\sqrt{5}$ の商は、$\sqrt{5}$ をかけて $\sqrt{3}$ になる数です。$\sqrt{5}>\sqrt{3}$ なのでその数は 1 より小さい数のはずです。例えば、$\dfrac{a}{b}\times b=a$ であることに着目すると、$\sqrt{5}$ をかけて $\sqrt{3}$ になるのは、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ となります：$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}=\sqrt{3}$ 。したがって $\sqrt{3}\div\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 。

分母を有理化するために分母と分子に $\sqrt{5}$ をかけると $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ となるので、次のようになります：$\sqrt{3}\div\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 。

なお途中で出てくる $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ という「分数」は、算数で学習した分数の考え方では理解がしにくいと思います。そこで、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ が $\sqrt{3}\div\sqrt{5}$ の商であることから逆に考

えて、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$という分数は「$\sqrt{5}$をかけると$\sqrt{3}$になるような数」のことだととらえておくとよいでしょう。ですから、$\sqrt{3}\div\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$はわり算を計算した結果を表しているともいえますし、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$の説明をしているということもできます。

分数のとらえ方が少しややこしいですが、ともあれ、無理数を含むわり算も、「わる数」をかけると「わられる数」になる数をみつける、として考えていくことができます。

複素数のわり算

小学校5年で $2\div3=\dfrac{2}{3}$ などと商を分数で表すことを学習しました。すぐ上で見たように、無理数の場合はこの考え方を用いて、$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$という分数は$\sqrt{3}\div\sqrt{5}$の商のこととしてとらえたりもしました。複素数の場合、教科書では「÷」を用いずに、分数の形でわり算を説明しています。ただ、ここでは算数や中学校の数学のわり算と同じように、「÷」で考えてみることにします。

$(2+9i)\div(1+2i)$ というわり算を考えてみましょう。これは教科書で $\dfrac{2+9i}{1+2i}$ と表されているのと同じです。$(2+9i)\div(1+2i)$ の商が $\dfrac{2+9i}{1+2i}$ だと考えてもよいでしょう。

これまでと同じように考えると、この商は $1+2i$ をかけたとき $2+9i$ になるような数です。分数のときと同じように、この数を $a+bi$ とおいてみます。すると、

$$(a+bi)\times(1+2i)=(a-2b)+(2a+b)i$$

となります。これが $2+9i$ と等しくなるので、$a-2b=2, 2a+b=9$ のはずです。これを連立方程式として解くと、a=4、b=1 なので、$a+bi=4+i$ となり、これが商と

なります。実際、これに $1+2i$ をかけてみると、

$$(4+i)\times(1+2i)=(4+8i)+(i+2i^2)=(4-2)+(8i+i)=2+9i$$

となり、確かに $2+9i$ になることがわかります。

ここでもわり算のきまりを用いることができます。例えば「わる数」の共役複素数 $1-2i$ を「わられる数」と「わる数」の両方にかけても商は変わらないはずです。そこで、

$$\{(2+9i)\times(1-2i)\}\div\{(1+2i)\times(1-2i)\}=\{(2+9i)\times(1-2i)\}\div 5$$

として、計算することもできます。

文字式のわり算

文字が入ると、1 つの数として商を求められない場合もでてきます。そのようなときは、商も文字の入った式になりますが、ただ商の表すものはここまでのわり算と同じように考えればだいじょうぶです。

例えば $12x\div 3$ であれば、3 をかけたときに $12x$ になる式が商になります。これは $4x$ とわかりますから、$12x\div 3=4x$ となります。

$(5a^2-2a)\div a$ の商は、a をかけると $5a^2-2a$ になるような式です。ここで $5a^2-2a=a(5a-2)$ であることに注意すると、そのような式は $5a-2$ とわかります。したがって、$(5a^2-2a)\div a=5a-2$ となります。

もちろん、$(5a^2-2a)\div a=(5a^2-2a)\times\dfrac{1}{a}$ と考えて、分配法則を使って計算することもできます。

では「わられる数」を少しだけ変えて、$(5a^2-2)\div a$ としたらどうでしょう。

ここで $5a^2-2$ を少し強引に a でくくると、$5a^2-2=a\left(5a-\dfrac{2}{a}\right)$ となります。ここから、a をかけると $5a^2-2$ になる式は $5a-\dfrac{2}{a}$ とわかり、これが$(5a^2-2)\div a$ の商になります。

多項式のわり算

文字式のわり算では、「わる数」が 1 つの文字だけでなく、「＋」や「－」の入った式になったわり算もでてきます。

例えば、$(x^2+3x-10)\div(x+5)$ です。このわり算も、「わる数」$x+5$ をかけると「わられる数」$x^2+3x-10$ になる式を求めることになります。$x+5$ と $x^2+3x-10$ という 2 つの式を比較すると、求める式がどのような形になりそうか、少しわかることがあります。それは、

「$x+5$ をかけて x^2 の式になるので、求める式は $x+c$ という形をしている。」

ということです。そこで $(x^2+3x-10)\div(x+5)$ の商を $x+c$ とおいてみます。これに $x+5$ をかけると

$$(x+c)(x+5)=x^2+(c+5)x+5c$$

となります。これが $x^2+3x-10$ に等しくなるはずですから $c+5=3$、$5c=-10$ です。$c=-2$ であればどちらの式も成り立ちますから、$c=-2$ でよさそうです。

したがって、$(x^2+3x-10)\div(x+5)$ の商は $x-2$ となります。

$(2x^3-7x^2+2x+3)\div(x^2-4x+3)$ ではどうでしょう。x^2-4x+3 をかけると $2x^3-7x^2+2x+3$ になる式について、これら 2 つの式を見ると、またわかることがあります。

「x^2-4x+3 をかけて $2x^3$ の式になるので、求める式は $2x+c$ の形をしている。」

$$(2x+c)(x^2-4x+3)=2x^3+(-8+c)x^2+(6-4c)x+3c$$

これが $2x^3-7x^2+2x+3$ に等しくなるはずですから、$-8+c=-7$、$6-4c=2$、$3c=3$ です。$c=1$ であればどの式も成り立ちますから、$c=1$ でよさそうです。

したがって $(2x^3-7x^2+2x+3)\div(x^2-4x+3)$ の商は $2x+1$ となります。

なお多項式のわり算では、自然数の範囲でわり算を考えたときのように、あまりがでることがあります。例えば $(2x^3-7x^2+8)\div(x^2-4x+3)$ で同じようにすると $-8+c=-7$、$6-4c=0$、$3c=8$ という方程式がでてきますが、これら 3 つの式を同時に満たす c はありません。そこで 2 次の係数の条件 $-8+c=-7$ を満たす $c=1$ を選び、それで合わない部分はあまりとして考えることになります。

まとめ

わり算を「等しく分ける」と結びつけてしまうと、わる数が小数や分数、無理数、複素数となるにつれて、「等しく分ける」のイメージとつながらなくなり、わり算が何かがわからなくなっていきます。まずは「わり算はかけ算の逆」と考えて、「わる数」をかけると「わられる数」になるような数を求めることととらえておくことで、わる数が変わっても、同じように考えることができます。

もちろんそのときには、小数をかけるとか、分数をかけるといったことが何を意味するのかが問題になってきます。小数や分数をかけることについては、別の資料も参考にしてみてください。

・小数や分数をかけること

https://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/ReLearn/proportions.pdf

・負の数をかけること

https://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/ReLearn/negative_numbers.pdf

文章題でわり算をどう使うのかや、わり算なのかかけ算なのかがわからなくなったら、まずは場面のようすをイメージしてみてください。そして、何を何倍したら何になったのかと情報を整理し、イメージしたことを「かけ算で」表してみてください。例えば、「80 cm を 0.4 倍したら青いテープになった」と整理し、これを 80×0.4＝□と表したり、「1 人分を 8 倍すると 4 L になる」と整理し、これを□×8=4 と表したりしてみます。

そのとき、□×8=4 のように、もしも「かけられる数」や「かける数」を求める必要がありそうなら、わり算を使えばよいでしょう。

おまけ：わり算のきまりとあまり

4.5 m のひもから 0.6 m のひもが何本とれるか、といった場面では、小数のわり算であっても、商を自然数の中からみつけることになります。「何本」を知りたいからです。

そこで 4.5÷0.6 の商を自然数の中からさがしてみます。ここで、わり算のきまりのことを思い出すと、わられる数とわる数の両方を 10 倍しても、商は変わらないのでした。45÷6 の方が小数の入った 4.5÷0.6 よりも考えやすそうですから、45÷6 で商を求めてみることにします。

そこで 6 倍して 45 に近くなる数をさがします。7×6＝42、8×6＝48 ですから、商は 7 となりそうです。このとき 7×6＝42 ですから、45 まではあと 3 必要です。そこで、45÷6 の結果は、45÷6＝7 あまり 3 となります。

わり算のきまりを用いて考えていたので、もとの 4.5÷0.6 の結果も商 7、あまり 3 としてよいことになりそうです。

ところが、この結果を次のように書いてみると、変であることに気づきます。

4.5÷0.6＝7 あまり 3　　　　4.5＝7×0.6＋3

7×0.6＋3 を計算すると、4.5 ではなく、7.2 になってしまいます。どこがおかしいのでしょう。

確かめのために、もとの 4.5÷0.6 のままで考えてみます。

今度は 0.6 倍して 4.5 に近くなる数をさがします。7×0.6＝4.2、8×0.6＝4.8 ですから、商はやはり 7 となりそうです。ただ、このときは 7×0.6＝4.2 なので、4.5 まで必要なのはあと 0.3 です。

わり算のきまりを用いたときは、わられる数もわる数も 10 倍していたので、「わられる数にするのにあといくつ必要か」の数も、10 倍の大きさになっていたのです。そのため、あまりも 10 倍になってしまっていました。

このように、わられる数とわる数を何倍かしたときには、商はもとのわり算と同じになりますが、あまりは何倍かした数になります。