

かなりわりきった
図形の見方のアップデート用テキスト

上越教育大学
布川 和彦

中学校数学で扱う図形は、基本的には算数に出てくるものと同じです。

ただ、種類としては同じなのですが、実はその見方を少しだけアップデートする必要があります。そのアップデートができていないために、数学での図形の学習がうまくいかなることがあります。

ここでは、中学校数学での平面図形の学習にとって必要な、図形の見方のアップデートにしばって考えていきます。図形の見方のアップデートができれば、あるいはアップデートが必要なことだけでも知っていれば、中学校での図形の学習はずいぶん楽になるはずです。

なお、図形の見方をアップデートすると、それとともに、図形を扱うときのルールもやっぱり変更になります。ルールがどのように変更になるのかについても、図形の見方とのつながりで少しだけ説明します。

登場人物の紹介

算数に出てくる平面図形は、次のようなものでした。

- ・ 三角形
その特別なものとして 二等辺三角形、正三角形、直角三角形
- ・ 四角形
その特別なものとして 長方形、正方形、台形、平行四辺形、ひし形
- ・ 多角形 特に五角形、六角形
- ・ 円

中学校の数学の学習で出てくる平面図形も、ほぼこれと同じです。たまにこれら以外のものが出てくることがありますが、そう多くはありません。数学の学習でも、登場人物は算数とそれほど変わらないのです。

また、算数で図形を見るときに注目したのは、次のようなことでした。

- ・ 辺の長さ や 角の大きさ
- ・ 辺どうしが平行か、辺どうしが垂直か
- ・ 多角形の対角線
- ・ 図形どうしが合同か
- ・ 図形が他の図形の拡大図や縮図になっているか
- ・ 図形が線対称か、点対称か

中学校の数学で図形を見るときに注目することも、やはり上のようなことがほとんどです。拡大や縮小の名前が少し変わり、「相似」と呼ばれるくらいです。

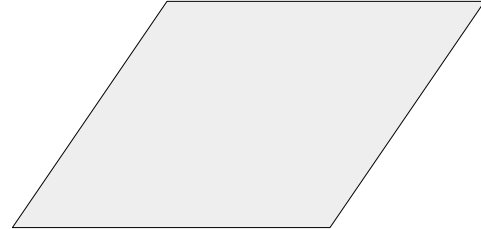
つまり、算数と数学では、登場人物はほぼ一緒ですし、登場人物を見るときに注意すべき点や、登場人物の間の関係として考えることも、ほぼ同じです。

ただし、次に見るように、図形の見方がちょっと違ってきます。そして、それともなって、図形の扱い方もちょっと違ってきます。これを意識できるかで、中学校の図形の学習がスムーズにいくかが変わります。

図形の見方の変更

「図形」は「かたち」ですから、まずは見た目です。見たときの「かたち」の特徴を、算数ではいろいろ調べてきました。

例えば右のような「かたち」であれば、長方形をすこし斜めにしたようなかたちとして、他のかたちとは見た目で区別することができました。また、辺のようすを調べると、向かい合う辺どうしは長さが等しいですし、また向かい合う辺は平行にもなっています。



さらに角を分度器で測ってみると、向かい合う角の大きさは等しくなっていますし、となり合う角はそれらの大きさをたすと 180° になりそうです。

対角線を2本引いてみると、長さは異なりますが、ただ、互いにちょうど線の真ん中で交わっていることに気づくかもしれません。

このように、上のかたちについて、その見た目からわかる特徴や、定規や分度器で測って見つけた特徴がいろいろありました。そして、こうしたかたちに「平行四辺形」と名前をつけて、他のかたちとは区別したのでした。

逆に、他のかたちを見たときに、こうした特徴を持つことに気づいたら、「この形は平行四辺形かな」と考えたりできるようになりました。

これは、ちょうど秋田犬であれば、毛は白と明るい茶色が混じった感じで、足先から背中まで65 cmくらい、がっちりしてるわりには足はすらっとしていて、目はアーモンド型で小さ目で、目・鼻・口が中央に寄っている、そして飼い主さんの横でお利口になっている、などと、その特徴にいろいろと気づくような感じです。そして、こうした特徴をした犬を見かけると、「これは秋田犬かな」と考えたりするのと似ています。

中学校の数学でも平行四辺形はよく出てきますし、それはもちろん算数で出てくる平行四辺形と基本的におなじかたちです。ただ、平行四辺形に対する見方をちょっとだけ変える必要があるのです。

実は、その中学校らしい「見方」のヒントは、算数ですでに学習しています。小学校4年生では、平行四辺形が次のような四角形であると学習しました。

向かい合う2組の辺が、どちらも平行になっている四角形を平行四辺形といいます。

実は中学校2年生でも、平行四辺形について次のような説明があります。

2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている四角形を平行四辺形といいます。

これだけ見ると、算数でも中学校の数学でも、平行四辺形についての見方はまったく同じであるように思えます。

では、平行四辺形についての見方は、どのように変わるのでしょうか。

中学校では、上の説明をまさに「文字通り」に、そのまま受け取るところに違いがあります。つまり「平行四辺形」は「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている四角形」であり、それ以上でもそれ以下でもありません。

例えば、上の説明では見た目については何も説明がありませんから、見た目はまったく関係なくなります。見た目がどうであれ、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている四角形」ならば、それは平行四辺形と考えます。この「文字通り」に受け取ることを徹底することが、中学校の数学と算数との違いと言っていいでしょう。

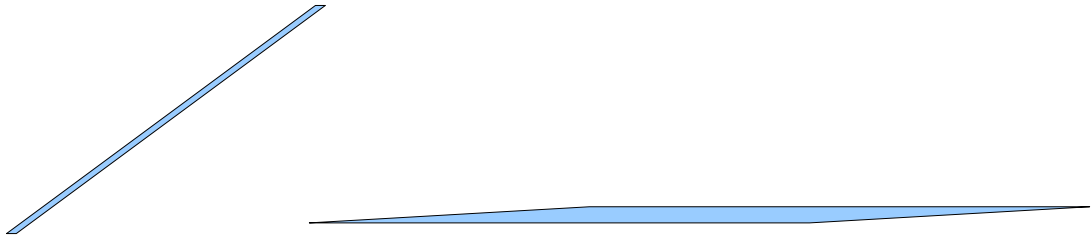
「文字通り」を徹底するには、「文字通り」以外には頼らないように自分をコントロールする必要があります。「何となく」や「感覚的」ではなく、自分を律した「見方」をするという点で、ちょっとだけ大人の見方であり、だからこそ、中学生になって学習するのです。

「文字通り」を徹底するという覚悟をもって上の説明を使う時、この説明を「定義 (definition)」と呼びます。上の説明は「平行四辺形の定義」です。

見方を変えると変わること

かたちを考えているのに見た目に頼らない「見方」をするのは変な感じがします。しかし見た目に頼らないことで、かたちのレパートリーに広がりが出ます。

例えば、下のようなかたちは、いつもの平行四辺形とは見た目がちがいすぎて、あまり見かけないかたちです。しかし、実は2組の向かい合う辺はそれぞれ平行になるようにしていますので、これらも平行四辺形ということになります。



また、向かい合う1組の辺の長さが3000 km、もう1組の辺の長さが10000 kmであるような四角形を考えてみます。逆に、1組の辺の長さが0.000000001 m、もう1組の辺の長さが0.0000000004 mの四角形を考えてみます。「考える」といっても、これだけ大きかったり小さかったりすると、その四角形がどのような見た目であるかは、特殊な装置を使わないと確かめようがありません。

しかし、どれだけ大きくても、どれだけ小さくても、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている四角形」であることがわかっているならば、私たちはこれらを平行四辺形と考えてよいのです。そして、教科書によくあるような見た目の平行四辺形で見つけたことを、そのままそうした四角形に応用して考えることができます。

下のかたちはどうでしょう。これらはどう見ても「長方形」にしか見えません。



しかし、よく考えてみると、長方形でも「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になって」います。中学校の数学では、見た目に関係なく「2組の向かい合う辺

が、それぞれ平行になっている四角形」を平行四辺形と考えるのでした。したがって、実は長方形も平行四辺形的一种であると考えられることになります。

同じ理由でひし形も平行四辺形的一种となります。ひし形も「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている四角形」だからです。

見た目が長方形やひし形のかたちを平行四辺形と呼ぶのは気持ち悪い感じもありますが、こうした捉え方には利点もあります。

長方形やひし形は平行四辺形的一种なのですから、平行四辺形で調べて見出したことは、そのまま長方形やひし形にもあてはまります。いちいち、長方形やひし形の場合にも同じなのかな、と改めて調べる必要はありません。改めて調べなくてよい分だけ、「思考の節約」ができるというわけです。

【補足】“2つ”は“1つ”？

平行四辺形は台形でしょうか。台形は、小学校4年生で学習したように、「1組(ひとくみ)の辺が平行な四角形」でした。一方、平行四辺形は「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている四角形」でした。

台形は1組だけど、平行四辺形は2組だからちがう、と考えるのがふつうです。おにぎりを2個食べた人は、おにぎりを1個しか食べなかった人とはちがいます。

しかし、数学では「2組あるなら1組はある」と考えます。つまり「1組」は「少なくとも1組」を意味すると考えるのです。おにぎりを2個食べた人は、おにぎりを少なくとも1個は食べたはずですから、「おにぎり1個食べた人」に含めて考えます。

したがって、平行四辺形は「(少なくとも)1組の辺が平行」なので台形と考えます。同じ理由で、長方形もひし形も台形です。

練習問題：次のことを、中学校数学らしい図形の「見方」で考えてみましょう。

- (1) 正三角形は二等辺三角形か (2) 正方形はひし形か

練習問題：年周視差の説明に出てくる三角形の大きさを想像してみましょう。

間奏曲

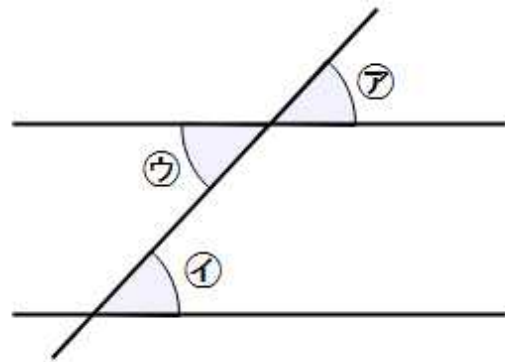
図形の見方が変わると図形の扱い方も変わることを説明する前に、そこで必要なことを1つだけ補足しておきます。

小学校4年生では平行を次のように学習しました：「1本の直線に垂直な2本の直線は平行であるといいます」。そして「平行な直線は、どこまでのばしても交わりません」とも学習しました。

一方、中学校では1年生で平行を次のように学習します：「2直線AB、CDが交わらないとき、ABとCDは平行であるという」。つまり、算数では平行な2直線の特徴だった「交わらない」ということが、中学校では平行であることの説明になっています。

実はもうちょっとちがいがあります。

4年生では上のように平行を学習した後で、平行線を調べることを通して、右の図の㊦と㊩のような同じ向きの角の大きさが等しくなることを学習しました。



中学校では2年生で、㊦と㊩のような位置にある角を「同位角 (どういかく)」と呼び、平行な線でできる同位角が等しいことを改めて学習します。

次に、上とは逆に、三角定規を用いて㊦と㊩のような同位角が等しくなるように2本の直線を引くと平行になることを確かめます。ここから、「同位角が等しければ、2直線は平行であると考えてよい」ことも学習します。

算数では「1本の直線に垂直な2本の直線」が平行だったのですが、中学校では「同位角が等しければ」2直線は平行になると考えます。つまり、算数では同位角が直角の場合しか平行と言えなかったのですが、中学校では直角でなくても、同位角が等しい大きさでありさえすれば、2直線は平行であると考えてよいことになったわけです。

ちなみに、前のページの図の④と⑤のような、ななめに向かい合った角のことを「錯角 (さっかく)」と言います。④と⑤が等しいと、①と⑦も等しいことがわかります。そこから、錯角が等しい場合も、2 直線は平行であると言えることになります。

中学校では、2 直線が1 本の直線に交わってできる同位角や錯角が、直角である必要はなく、とにかく大きさが等しければよいので、2 直線が平行かの判断がしやすくなります。そして、この平行の判断が、中学校2 年生と3 年生の学習では大活躍します。

なお、同位角が等しいと2 直線が平行になることを、中学校の学習でも三角定規を用いた作図を通して確認しています。これは何となく算数っぽい学習だなと思うかもしれません。

実は、同位角が等しければ平行になる、ということは、もっと簡単なことから説明するのはむりだとされています。ですから、上のような作図を通してある程度、納得できたら、これを私たちが図形を学習する時の“大前提”として使っていくことにしましょう。

扱い方のルールの変更

中学校では「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている四角形」が平行四辺形だという説明を、文字通りに受け取り、それを徹底すると述べました。

これを徹底するために、平行四辺形をどのように扱うべきかのルールも、少し変更になってしまいます。「徹底する」ことを具体的に言うと、次の2つの方針になります。

- ① 平行四辺形について何かを主張する時は、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことから説明すること。
- ② ある図形が平行四辺形であると主張する時は、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことを説明すること。

- ① 平行四辺形について何を主張する時は、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことから説明する

算数でも、平行四辺形の向かい合う辺の長さが等しいことや、向かい合う角の大きさが等しいことを学習しました。その時は、2～3個の平行四辺形について、辺の長さを定規で測ったり、角の大きさを分度器で測ったりして、それらが等しいことを確認したのです。

ただこれですと、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことが原因となって、向かい合う辺の長さや角の大きさが等しくなっているのかが明らかではありません。つまり、辺の長さや角の大きさについて起こっていることが、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことから説明されているとは言えません。

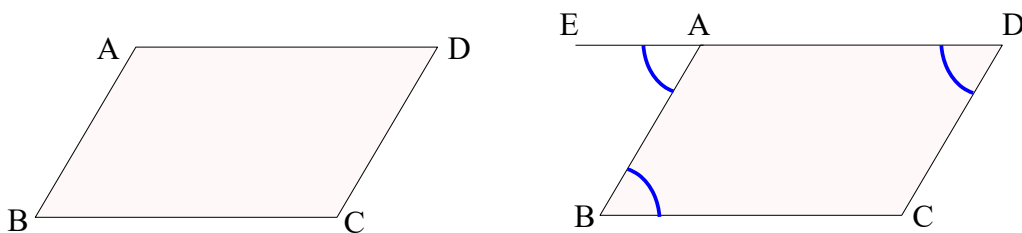
そのため、他の「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」図形でも、定規や分度器で測ったら同じ結果になるのか、あるいは紙で作って折って調べると同じ結果になるのかが、はっきりしません。

そこで、中学校では「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になってい

る」ことだけがわかっているとして、それだけから、辺の長さや角の大き
さで起こっていることが説明できるようにがんばります。

ただし、中学校で平行四辺形を調べる時は、「間奏曲」で見たような平行
と同位角や錯角の大きさの関係も、それ以前に学習しています。そこで、
こうしたすでに確認したことは、説明の中で使ってもよいことにします。
その上で、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことだけ
から、辺の長さや角の大きさのことが説明できるかを考えます。

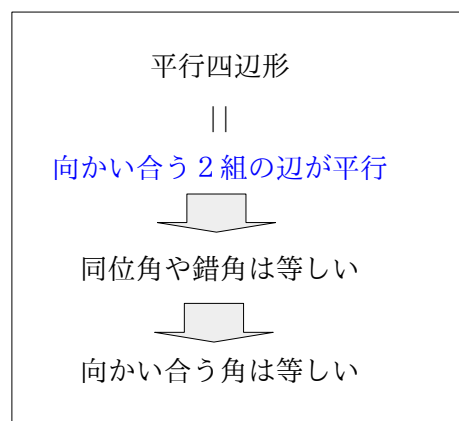
辺が平行になっていることしかわからないわけですが、平行と同位角や
錯角の関係をのことを思い出すと、平行から角の情報が導けそうです。実
際、次のようにして、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になってい
る」ことから、角についての情報を得ることができます。



平行四辺形 ABCD で、 $AD \parallel BC$ であることに着目すると、 $\angle ABC$ と
 $\angle EAB$ は錯角になっていますから、 $\angle ABC$ と $\angle EAB$ は大きさが等しいこと
がわかります。さらに $AB \parallel DC$ であることに着目すると、 $\angle EAB$ と $\angle ADC$
は同位角になっていますから、 $\angle EAB$ と $\angle ADC$ も大きさが等しいことがわ
かります。そして、 $\angle ABC = \angle EAB = \angle ADC$ だとわかります。

つまり「2組の向かい合う辺が、それ
ぞれ平行になっている」ことから、向か
い合う角の大きさが等しいことがわか
ります。

ここでは、すでに学習した同位角や
錯角のことは利用しましたが、それ以
外では、辺が平行であることしか使っ
ていません。つまり「2組の向かい合う



辺がそれぞれ平行になっている」ことだけから、向かい合う角の大きさが等しいことを説明することができたことになります。途中で角の大きさを測るといったことは必要ありませんでした。

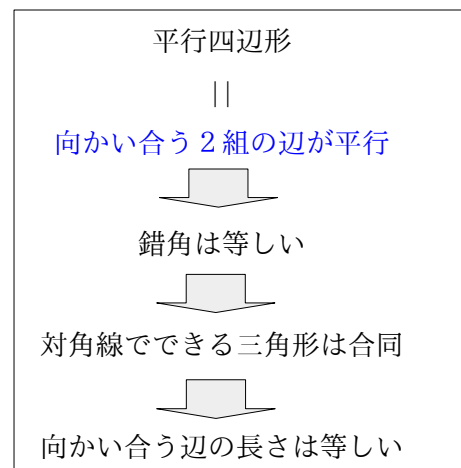
上の説明では「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことだけしか使っていませんから、2組の辺が平行であれば、辺が何 cm かや角が何度か、そして見た目がどのようなになっているかに関係なく、いつでも同じ説明をすることができます。

このように、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことだけから説明することで、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」四角形、つまり平行四辺形であれば、いつでも同じ説明が可能となり、結果として、平行四辺形であれば向かい合う角の大きさが等しいことがわかります。

練習問題：前のページの図で $\angle BAD = \angle BCD$ であることを、同じように説明してみましょう。

練習問題：「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことから、向かい合う辺の長さが等しいことは、1本の対角線を引いてできる2つの三角形が合同であることに着目すると、右のような方針によって説明することができます。

説明を完成させてみましょう。



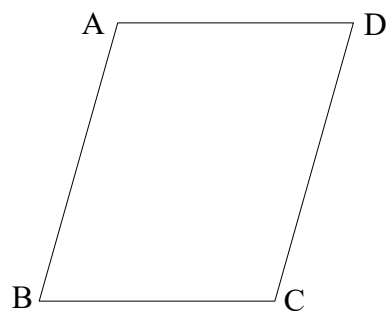
考える途中では、もちろん、前のページのような図を使ってもかまいません。ただし、中学校で図形の扱い方のルールが変わったので、図から見つけたことをそのまま、説明の中で使ってよいとは限りません。見つけた

ことが「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」こととつながっているか、あるいはすでに学習した内容であることを確認しながら、自分の考えをコントロールすることが、“大人の思考”としてたいせつです。

② ある図形が平行四辺形であると主張する時は、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことを説明すること。

図形の扱い方のルールが変わったことにより、ある図形が平行四辺形であると言いたい時は、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことを説明することが必要になります。

例えば、向かい合う辺の長さが同じになるようにして四角形をかいたら、右の図ようになったとします。確かに見た目は平行四辺形です。また、三角定規で調べると平行になっているかの確認もできそうです。

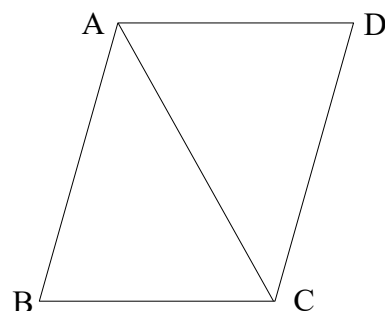


しかし中学校のルールでは、この図形が平行四辺形あることを主張したい時は、この作り方から、「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことを説明することが求められます。つまり、向かい合う辺の長さを同じにすると、なぜ向かい合う辺が平行になるのかを説明する必要があるのです。

辺の長さの情報から平行であることを説明したいのですが、平行が同位角や錯角と関わっていたことを思い出すと、まずは角の情報を集めるのがよさそうです。さらに、辺の長さと角の情報を結びつけるためには、合同な三角形を利用することが考えられます。

そこで頂点 A と C を結んで今の四角形を 2 つの三角形に分けてみます。

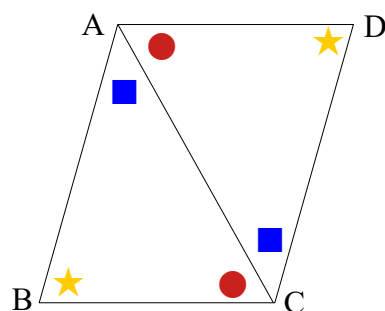
向かい合う辺の長さを等しくしていますから、 $AB=DC$ 、 $AD=BC$ となっています。また、 AC は 2 つの三角形に共通の辺ですが、当然、同じ長さです。



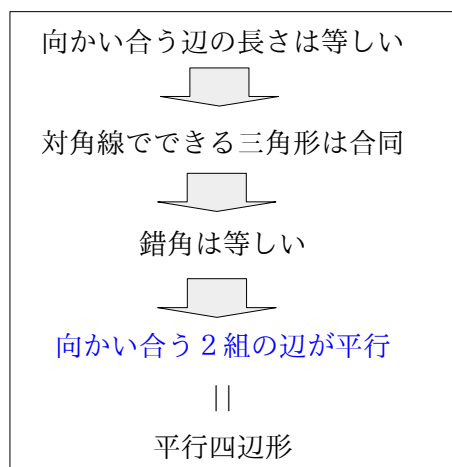
ここから 3 辺の長さが等しいので、 $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ が合同であることがわかります。また、合同であることから、対応する角の大きさが等しいこともわかります。こうして、角についての情報が得られます。

対応する角に●、■、★の印をつけると右のようになります。

ここで■に着目すると、■は AB と CD に AC が交わっていると見たときの錯角になっています。その錯角が等しいのですから、 AB と CD は平行であるとわかります。



●に着目して同じように考えると、 AD と BC も平行であることがわかります。つまり向かい合う辺の長さが等しいということから、向かい合う辺が 2 組とも平行になっていることが説明できたことになります。これで、向かい合う辺の長さを同じにして作った四角形が、平行四辺形になることが説明できました。



このように、中学校のルールでは、作った四角形が平行四辺形であると主張したい時には、その四角形の向かい合う辺が 2 組とも平行になっていることを説明しなければなりません。

どう見ても見た目は平行四辺形だとしても、それを根拠に平行四辺形であると主張することはできません。また、三角定規などで向かい合う辺が平行であることを確かめても、やはり主張はできません。平行になったことが、辺の長さを同じにしたことによるものなのかが、はっきりせず、「向かい合う辺の長さを等しくした」時に必ずそうなるとは言いきれないからです。

中学校で図形を扱うルールが変わったことで、平行四辺形であることを主張する時は、上で見たように、とにかく「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことを、わかっていることをもとにして説明する必要があります。

ただし、ここで見たように向かい合う辺の長さが等しいならば、そこから「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことを一度、きちんと説明できたら、次からは、「向かい合う辺の長さが等しい」ことを説明できた段階で、考えている四角形が平行四辺形であると主張してもよいことになっています。「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことも、前にした説明から自動的にわかるからです。いわば、どんなに疲れていても50 mくらいなら走れそうだという人であれば、ゴールの手前50 mまで来たところでゴールとみなしてもらえるといた制度です。

このように、他の情報から「2組の向かい合う辺が、それぞれ平行になっている」ことを説明しておく、ゴールまで行く手間がはぶけることが多くなります。中学校で、「平行四辺形になる条件」を確認しておくのは、こうした利点があるからです。

まとめ

①や②の方針で説明することを、「証明 (proof)」と呼びます。つまり、定義とすでに説明済みの情報だけを使って、自分の主張を説明することです。他の人から「どうしてそんなこと言えるの?」と言われても、「なぜ言えるのか」をきちんと説得できるような説明をめざします。本当に使える材料だけで、そうした説明を作ることができるかにチャレンジする、ゲームのようなものです。

ただし、そのゲームは勝つこと自体が目的ではありません。そうした説明を通して、定義からわかることをふやすことで、例えば平行四辺形についてのイメージを豊かにしたり、平行四辺形を含むもっと複雑な形で起こる現象を説明したりすることが、このゲームの本当の目的です。

また②のように説明された情報を多く持っている、他の図形の中に現れた平行四辺形に気づきやすくなり、またそれが本当に平行四辺形なのかを説明することもしやすくなります。こちらはいわば、ゲームで使えるアイテムをふやすことになります。

そうした説明が求められるようにルールが変わったのは、図形に対する見方が変わったからです。新しい「図形の見方」にふさわしい図形の扱い方が、①や②の「説明の仕方」なのです。そして、こうした見方や説明の仕方のルールの変更に注意することが、中学校で数学を学習するための1つのポイントです。

もしも数学の学習をしていて、「なんで証明なんてするのかなあ、見ればわかるのに」と思うことがあれば、それは図形の見方がアップデートできていないからです。算数と同じ“相手”に出会ったとしても、そこは、ちょっと大人目線でつきあっていきましょう。