かなりわりきった

算数の文章題の考え方

上越教育大学

布川　和彦

計算ならできるのに、文章で書かれた問題になると、何算を使ったらよいかよくわからないとか、わり算を使えばよさそうだけど、何を何で割ったらよいか自信がない、といった人も多いでしょう。

そうした問題を解くために、線の図や面積の図をかくとよいという話もあります。ただ、説明を読んだり聞いたりした時は納得できたのに、いざ自分で図をかいてみようと思うと、どのようにかいてよいかわからないという場合もあります。そして、そうした図の「かき方」を、新しくおぼえなければいけないことになってしまうかもしれません。

あるいは、いくつかの問題のタイプについて、それを解くためのうまいやり方をおぼえた人もあるかもしれません。もちろんそれで解けて、自分でもその答えに納得がいくならそれでよいのですが、「解けたは解けたけど、なぜこのうまいやり方で解けるのか、しっくりしない」という人もあるかもしれません。

ここでは、そうした“うまい”やり方ではなく、もうちょっと素朴で、地道なやり方で問題に取り組んでみます。“うまい”やり方のように効率的ではないのですが、ただ、なぜそうすればよいかは、見えやすくなります。それにより自分で「解答を作った」という手ごたえは感じやすくなるでしょう。

目　次

文章題の考え方

算数の問題で、文章で場面が説明されていて、何か計算をして答えを求めるのだろうなという問題があります。この時、どのような式を立てたらよいかを、どうやって決めたらよいでしょうか。

こうした時に式を立てるには、まずは次のように考えるとよいでしょう。

> 式は、数量の関係を表現する。

式が場面に出てくる数量の関係を表現するのだとすると、式を立てるには、場面に出てくる数量の関係について調べればよいことになります。

場面に出てくる数量の関係について調べて、その関係をはっきりさせたいと思った時に、いちばん大切なことはなんでしょう。場面に出てくる数量のことを知りたいのですから、まずは場面そのものを知ることが大切になります。仮に、場面のようすはまったくイメージできていないとすると、そこに出てくる数量の関係についてもよくわかりませんから、式で表現することはとてもできそうにありません。まずは場面そのものを知ることです。

とは言え、最初から場面のイメージが、くっきりと思い描(えが)けるわけではありません。ですから、最初は、ぼやーっとした、おおざっぱな、大体(だいたい)のイメージでよいのです。そうした大体のイメージであっても、とりあえずイメージが持てると、そこから気づくことがあるかもしれません。そして、一つのことに気づくと、また別のことに気づくことがあるかもしれません。

このように、場面について気づいたことを加えていって、少しずつ場面のイメージをふくらませていくと、場面のようすが少しずつくっきりとしていきます。その中で、場面に出てくる数量の関係についても、見えてくることがあるかもしれません。そして、数量の関係が見えてきたら、それを式で表現しようとすることで、式が自然に立つことになります。

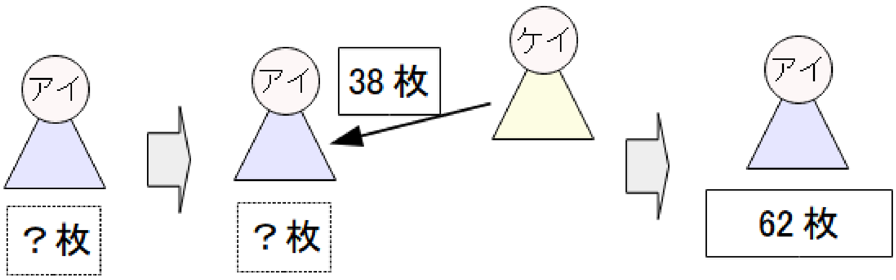
ここでは、場面のイメージをもち、それを少しずつふくらませていくという考え方で、いろいろな問題を解いてみます。基本的な問題から、ちょっとむずかしい問題まで同じ考えで進めていくことで、算数の問題を解くという感じを高めていきましょう。

基本的な文章題：全国学力・学習状況調査から

まずは基本的な問題について、上で述べた「場面のイメージをもち、それを少しずつふくらませていく」という考え方で解いてみます。」

問題：アイさんは、はじめに折り紙を何枚か持っていました。
ケイさんから 38 枚もらったら、全部で 62 枚になりました。
アイさんは、はじめに折り紙を何枚持っていたでしょう。
(令和 6 年度全国学力・学習状況調査算数問題 1 (2))

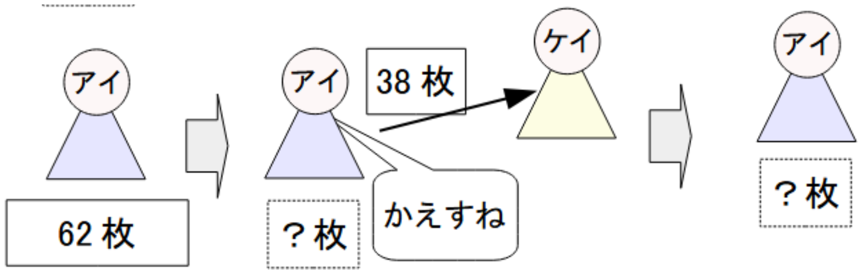
問題を読んだときに、どんな場面がイメージできますか。例えば、次のようなイメージになるのではないでしょうか。



【考え方 1】

このイメージからイメージをふくらませると、次のことに気づきます。

※ 62 枚のうちケイさんからもらった 38 枚をかえしたら、もとの？枚になる。



ここでわからない「？枚」を算数っぽく「□枚」と表して、このふくらませたイメージを式で表すと、次のようになります。

６２－３８＝□

62－38 を計算すると、アイさんははじめに 24 枚もっていたことがわかります。

【考え方２】

もとの？枚を「□枚」として、最初のイメージをそのまま式で表すと、次のようになります。

□＋３８＝６２

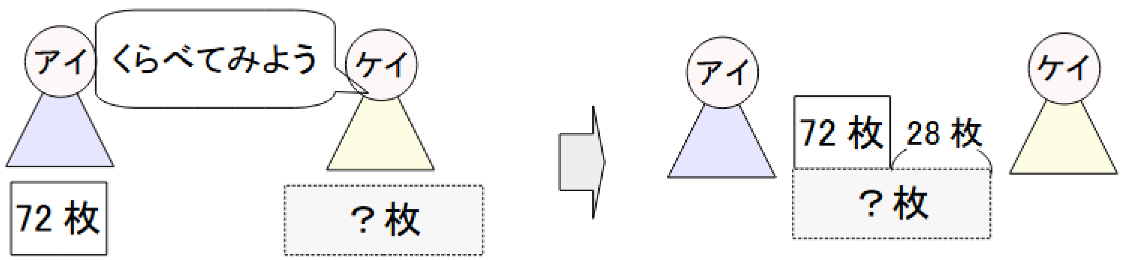
□を使うと、問題文を読んだときのイメージをそのまま表すことがしやすくなります。一方で、もとのイメージからさらにイメージをふくらませて※のように考えると、別の形の式で場面を表すこともできます。

たいせつなのは、まずは場面をイメージしてみることです。そのまま式で表せそうなら、すぐに式で表してよいでしょう。すぐに表すのがむずかしいと感じたときは、そのイメージからわかることがないか考えてイメージをふくらませてみると、式で表せそうな感じまでもっていくことができるかもしれません。

それでは、次のような問題はどうでしょう。

問題：アイさんは、折り紙を 72 枚持っています。
アイさんが持っている折り紙は、ケイさんが持っている折り紙より 28 枚少ないです。
ケイさんは折り紙を何枚持っているでしょう。
(令和 6 年度全国学力・学習状況調査算数問題 1 (2))

今度はどんな場面がイメージできますか。例えば、次のようなイメージではどうでしょう。枚数をくらべてみたら、アイさんの方が 28 枚少なかったというイメージです。



【考え方１】

上のイメージをふくらませると、アイさんよりケイさんの方が 28 枚多いというイメージがえられます。ケイさんの？枚を「□枚」と表すと、72 枚より 28 枚多くするとケイさんの枚数になるのですから、このことは次のように表すことができます。

７２＋２８＝□

【考え方２】

アイさんの持っている 72 枚が、ケイさんの？枚より 28 枚少ないのですから、「？枚」から 28 枚だけ少なくしたら、アイさんの持っている 72 枚になった、というイメージがうかびます。

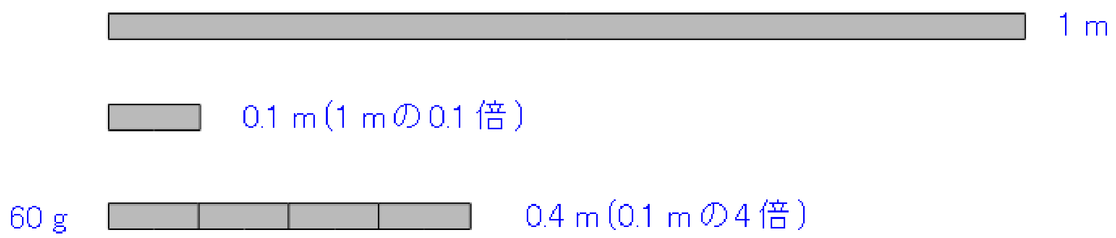
そこで、もとの？枚を“とりあえず”「□枚」と表して、上の図のイメージをそのまま式で表すと、次のようになります。

□－２８＝７２

【考え方１】では「ケイさんよりアイさんが 28 枚少ない」ことから、「ケイさんはアイさんより 28 枚多い」とイメージをふくらませることで、式に表すことができました。一方で、【考え方２】では、□を式の中で使うことで、もとの場面のイメージをそのまま式に表すことができました。

問題：0.4 m の重さが 60 g の針金があります。
　　　この針金 1 m の重さは何 g ですか。
　　　　　　　(平成 30 年度全国学力・学習状況調査算数問題 1 (3))

0.4 m というのは、1 m の 0.4 倍の長さです。そして 1 m の 0.4 倍の長さというのは、1 m の 0.1 倍の長さの 4 つ分の長さです。



針金の長さを 0.4 倍にするとその重さも 0.4 倍になると考えられます。1 m の重さを 0.4 倍したら 60 g になったということです。そこで、1 m の重さを“とりあえず”「□ g」と表しておくと、場面のイメージは、次のように表すことができます。

$$60\ \mathrm{g} = \square\ \mathrm{g} \times 0.4$$

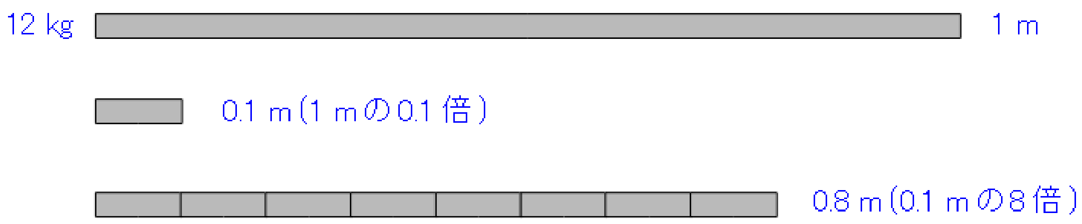
60＝□×0.4 より□＝60÷0.4 ですから、これを計算して <u>150 g</u> と求めることができます。

実際、1 m の重さが 150 g であれば、0.4 m の重さは 150×0.4＝60 で、確かに 60 g となりますから、場面のイメージにも合っています。

上の図のようなイメージからすると、0.4 m の重さが 60 g なら、0.1 m の重さはその $\frac{1}{4}$ 倍のはずですから、$60 \times \frac{1}{4} = 15$ あるいは 60÷4＝15 より 15 g とわかります。そして 1 m の重さはその 10 倍なので、15×10＝150 より 150 g となります。このように考えても、上の結果と同じになります。

問題：1 m の重さが 12 kg の鉄の棒があります。
この鉄の棒 0.8 m の重さは何 kg ですか。
(平成 30 年度全国学力・学習状況調査算数問題２)

0.8 m というのは、1 m の 0.8 倍の長さです。そして 1 m の 0.8 倍の長さというのは、1 m の 0.1 倍の長さの 8 つ分の長さです。



棒の長さが 0.8 倍になるとその重さも 0.8 倍になると考えられます。そこで、0.8 m の重さを“とりあえず”「□ kg」と表しておくと、今の場面のイメージは、次のように式で表すことができます。

$$\square\ \mathrm{kg} = 12\ \mathrm{kg} \times 0.8$$

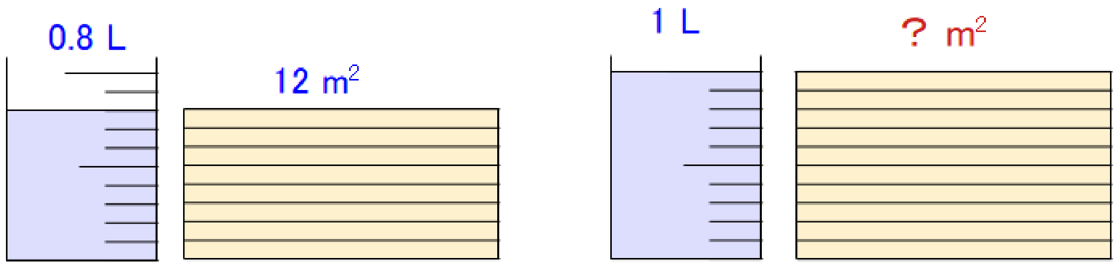
□＝12×0.8＝9.6 ですから、この鉄の棒 0.8 m の重さは <u>9.6 kg</u> とわかります。

上の図のイメージからすると、1 m の重さが 12 kg なら、0.1 m の重さはその $\frac{1}{10}$ 倍のはずですから、$12\times\frac{1}{10}=1.2$ あるいは 12÷10＝1.2 より 1.2 kg とわかります。そして 0.8 m の重さはその 8 倍なので、1.2×8＝9.6 より 9.6 kg となります。このように考えても、上の結果と同じになります。

答えが出た後でも、イメージから他にわかることを考えてみて、自分の答えと話のつじつまが合うかを確認することも、たいせつです。つまり、<u>答えが出た後でもさらにイメージをふくらませる</u>ことにも意味があります。

問題：0.8 L で板を 12 m^2 ぬることができるペンキがあります。
このペンキ 1 L では、板を何 m^2 ぬることができますか。
(平成 30 年度全国学力・学習状況調査算数問題２)

0.8 L は 1 L の 0.8 倍の量ですから、0.8 L のペンキでぬることができる面積は、1 L でぬることができる面積の 0.8 倍になると考えられます。



1 L でぬることができる面積「？ m^2」を“とりあえず”「□ m^2」と表しておくと、今の場面のイメージは、次のように式で表すことができます。

$$12\ m^2 = \square\ m^2 \times 0.8$$

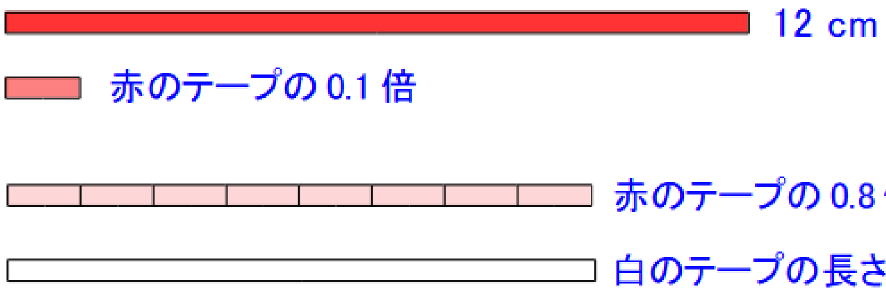
12＝□×0.8 なので□＝12÷0.8 となります。これを計算すると 12÷0.8＝15 となり、1 L では 15 m^2 ぬることができるとわかります。

実際 1 L で 15 m^2 ぬることができると、0.8 L でぬることができる面積は、15×0.8＝12 で確かに 12 m^2 になりますから、今の場面のイメージと合っています。

上の図のようなイメージからすると、0.8 L でぬることができる面積が 12 m^2 なら、0.1 L でぬることができる面積はその $\frac{1}{8}$ 倍のはずですから、$12 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$ あるいは 12÷8＝1.5 より 1.5 m^2 とわかります。そして 1 L でぬることができる面積はその 10 倍なので、1.5×10＝15 より 15 m^2 となります。このように考えても、上の結果と同じになります。

問題：赤いテープの長さは 12 cm です。
白いテープの長さは、赤いテープの長さの 0.8 倍です。
白いテープの長さは何 cm ですか。
(平成 30 年度全国学力・学習状況調査算数問題２)

0.8 倍は、基準とする量の 0.1 倍の長さの 8 倍、つまり基準とする量を 10 等分した 1 つ分の長さの 8 つ分であることを表していました。そこで、ここから今の場面は次のようにイメージすることができます。



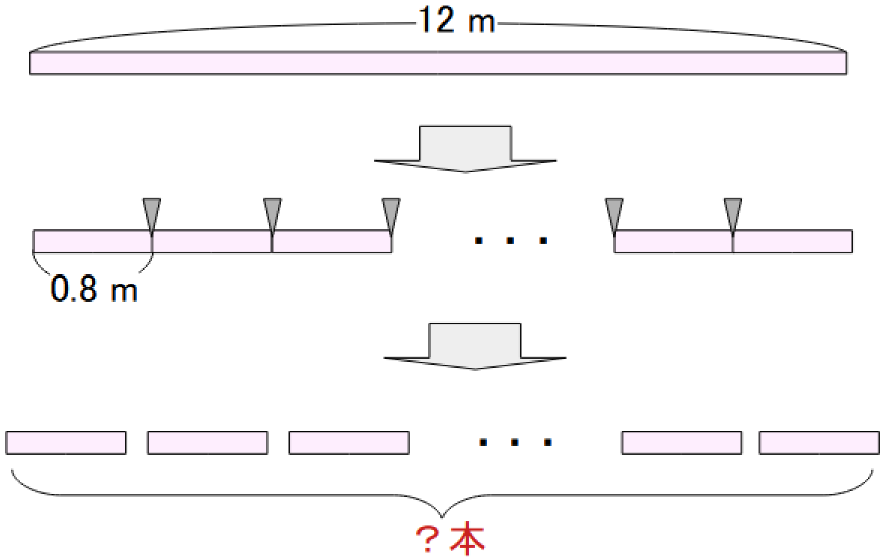
このイメージから、白のテープの長さは 12 cm より少しだけ短いとわかります。

0.8 倍の長さを求めるにはかけ算をするのでした。そこで、12 cm の 0.8 倍の長さを 12×0.8 として求めてみると $12\times0.8=9.6$ ですから、確かに 12 cm より少し短くなっています。したがって、白のテープの長さは 9.6 cm でだいじょうぶそうです。

上の図のようなイメージからすると、基準とする赤のテープの長さが 12 cm なら、その 0.1 倍の長さは 12 cm の $\frac{1}{10}$ 倍のはずですから、$12\times\frac{1}{10}$ あるいは $12\div10$ より 1.2 cm とわかります。そして白のテープの長さは赤のテープの長さの 0.8 倍ですから、0.1 倍の長さの 8 倍の長さとなります。したがって、1.2×8 で求めることができます。1.2×8 を計算すると $1.2\times8=9.6$ となるので、白のテープの長さは 9.6 cm であると求まります。このように考えても、上の結果と同じになります。

問題：長さが 12 m のリボンを 0.8 m ずつ切っていきます。
0.8 m のリボンは何本できますか。
(平成 30 年度全国学力・学習状況調査算数問題２)

12 m のリボンを 0.8 m ずつに切っていって、切り終わったようすをイメージしてみましょう。0.8 m のリボンが何本できたかはまだわからないのですが、できた 0.8 m のリボンを全部あわせると、もとのリボンの長さ 12 m にもどるはずです。ここから、今の場面を次のようにイメージすることができます。



ここで「？本」の部分を“とりあえず”「□本」と表しておくと、0.8 m のリボンが□本で 12 m にもどるということですから、場面のイメージは、次のように式で表すことができます。

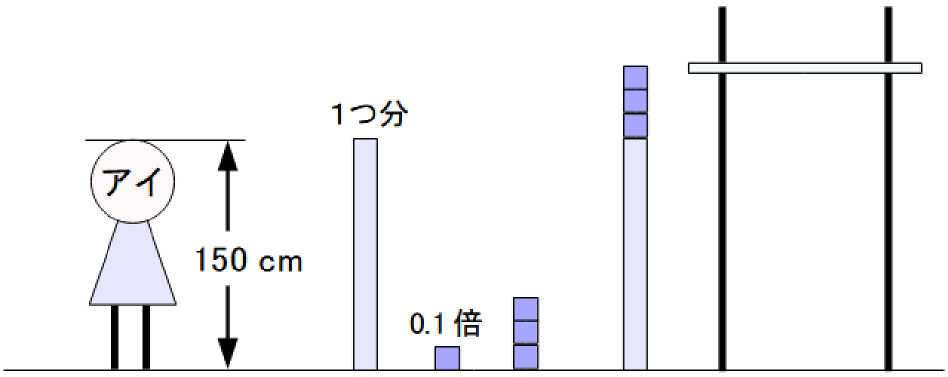
12 m＝0.8 m×□

12＝0.8×□なので□＝12÷0.8 となります。12÷0.8 を計算すると 12÷0.8＝15 となるので、0.8 m のリボンは 15 本できることがわかります。

実際、0.8 m のリボンを 15 本つなぎあわせた時の長さを考えると、0.8×15＝12 となり、もとのリボンの長さに戻りそうです。

問題：オリンピックに出場するような走り高とびの選手は。自分の身長の約 1.3 倍の高さのバーをとぶことができるそうです。
アイさんはもし自分も、自分の身長の 1.3 倍の高さのバーをとぶことができたら、何 cm の高さをとぶことができるのかを知りたいと思いました。
アイさんの身長は 150 cm です。アイさんの身長の 1.3 倍は何 cm になりますか。
(令和 2 年度全国学力・学習状況調査算数問題 1 (1))

1.3 倍ということは、基準にする量の1 つ分に、基準にする量の 0.1 倍の 3 つ分、つまり 10 分の 1 の量の 3 つ分を合わせた量のことでした。そのことに注意して、今の場面をイメージしてみると次のようになります。



今の場面では、基準にする量はアイさんの身長の 150 cm ですから、基準とする量の「1 つ分」は 150 cm となります。その 0.1 倍、つまり 10 分の 1 は 15 cm ですから、その 3 つ分は 45 cm となります。
したがって、アイさんの身長の 1.3 倍は 150＋45＝195 で 195 cm となります。

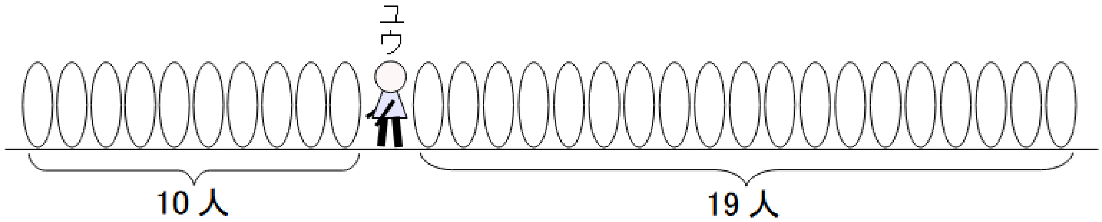
もちろん、1.3 倍を求めるに「×1.3」をすればよいとわかっていれば、次の計算をして、195 を求めることができます。

$$150\times1.3=195$$

しかしどのような計算をしたらよいか自信がない時は、上のように 1.3 倍のイメージをしてみるとよいでしょう。

問題：バスに乗る人が一列に並んで待っています。
ユウさんの前に 10 人、後ろに 19 人います。
並んでいる人は全部で何人いますか。
(平成 28 年度全国学力・学習状況調査算数 A 問題９(1))

場面をイメージすると、次のようになります。



このイメージから、全部の人数を求めるには、ユウさんの前にいる 10 人と後ろにいる 19 人、さらにユウさん自身もくわえる必要があることがわかります。

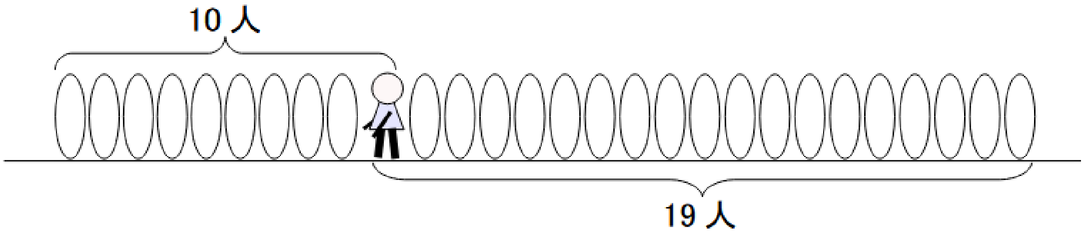
つまり、全部の人数を表す式は

10＋1＋19

となり、ここから全部で 30 人の人が並んでいることがわかります。

ではもしも「ユウさんは前から数えて 10 番目、後ろから数えて 19 番目」だったら、並んでいる人は何人でしょうか。

この場合のようすをイメージすると、今度は次のようになります。



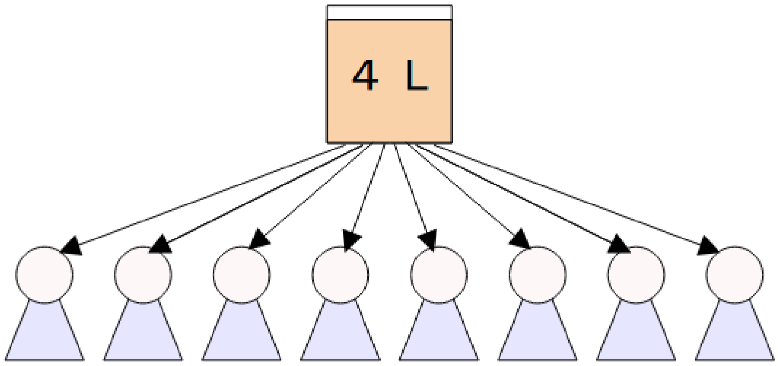
ユウさんが前から数えて 10 番目ということは、１番目の人からユウさんまで含めて 10 人いることになります。後ろから数えて 19 番目ということは、1 番後ろの人からユウさんまで含めて 19 人いることになります。

ユウさんは２度数えられていますから、10＋19 から重なりの分をひかなければなりません。10＋19－1＝28 で、28 人並んでいることがわかります。

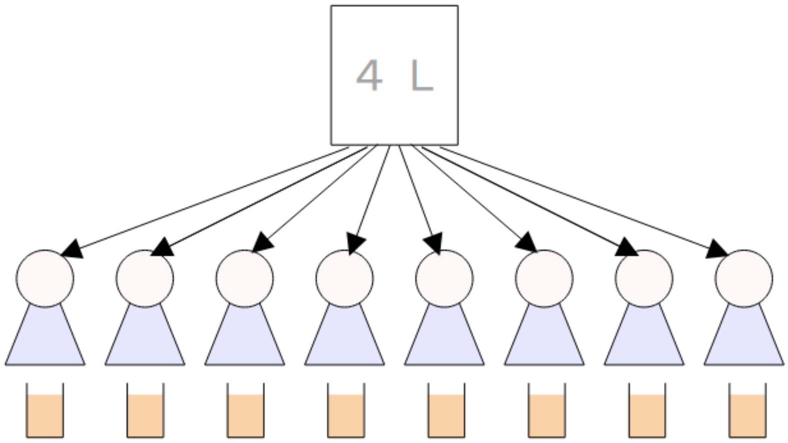
問題：8 人に 4 L のジュースを等しくわけます。
1 人分は何 L ですか。
(令和 3 年度全国学力・学習状況調査算数問題 4 (2))

かけ算なのか、わり算なのか、またわり算だとしても 8÷4 なのか 4÷8 なのか、このあたりの自信がない時は、まずは場面をイメージしてみましょう。

「8 人に 4 L のジュースをわける」のですから、次のような感じです。



さらに分け終わったところをイメージすると次のようになります。



1 人分が何 L かはまだわからないのですが、 1 人分の量を 8 人分合わせるともとの 4 L になるはずです。つまり、 1 人分の量の 8 倍が 4 L です。

そこで 1 人分を“とりあえず”「□ L」と表して、場面の様子を式に表してみると次のようになります。（参考：単位量あたりの大きさの問題）。

4 L＝□ L/人×8 人

あるいは、□ L の 8 倍が 4 L なので、次のように考えてもよいでしょう(参考：割

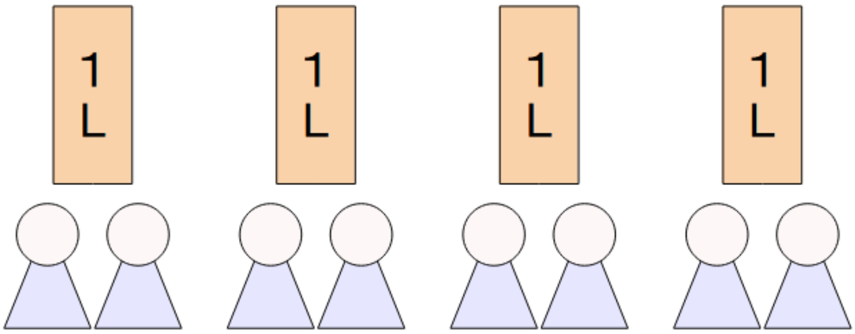
合の問題の解き方)。

$$4\,\mathrm{L} = \square\ \mathrm{L} \times 8$$

どちらにしても$4 = \square \times 8$なので、ここから$\square = 4 \div 8$となります。$4 \div 8 = 0.5$と計算してもよいですし、$4 \div 8 = \frac{1}{2}$と計算してもよいでしょう。

計算の結果から1人分は0.5 L、あるいは同じことですが$\frac{1}{2}$ Lとなります。

ジュースの4 Lを1 Lのパック4本としてイメージすると、次のようにも考えることができますから、1人分は1 Lパックの半分で、0.5 Lという結果と一致します。

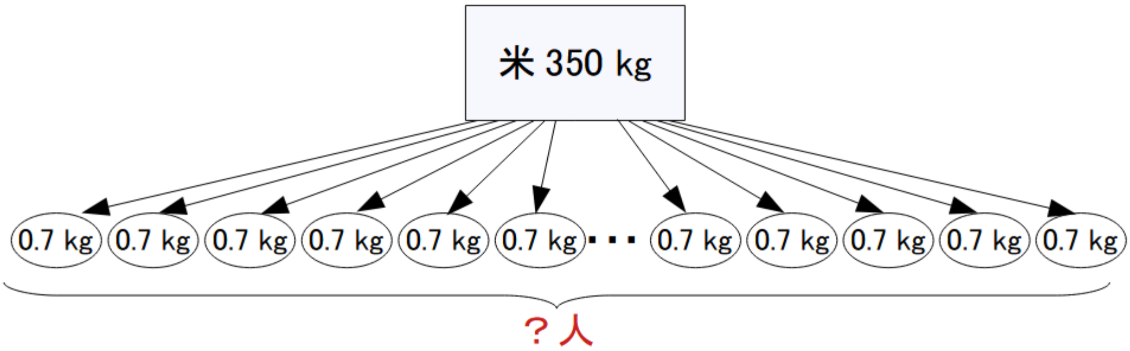


どのような計算をしたらよいかがわからない時は、とりあえず場面のようすをイメージして、そのイメージをふくらませる中で、計算の仕方を考えるのも一つの方法です。

また計算をした後でも、上のようなイメージと自分の計算の結果とをくらべてみて、結果が場面のようすに合っているかを確かめてもよいでしょう。

問題：350 kg の米を 1 人に 0.7 kg ずつ配ります。
何人に配ることができるでしょうか。
(令和 6 年度全国学力・学習状況調査算数問題 2 (2))

何人に配るのかはわかっていませんが、とにかく 350 kg の米を 0.7 kg ずつ配るのですから、以下のような場面がイメージされます。



0.7 kg ずつ配ると、10 人に配って 7 kg、100 人に配っても 70 kg ですから、イメージの中の「？人」はかなりの人数だということもわかります。とは言え、配ったものを全部集めれば、もとの 350 kg になることは確かです。そんなふうに場面のイメージをふくらませることができます。

上のイメージでは「？人」としているところを、とりあえず「□人」と表しておくと、1 人あたり 0.7 kg の□人分が 350 kg なので、上のイメージを次のように式で表現することができます（参考：単位量あたりの大きさの問題）。

350 kg ＝ 0.7 kg/人 × □人

あるいは、□人に配ることができたとすると、0.7 kg の□倍が 350 kg になっていると考えることもできます。すると、上のイメージを次のように式で表すこともできます(参考：割合の問題の解き方)。

350 kg ＝ 0.7 kg × □

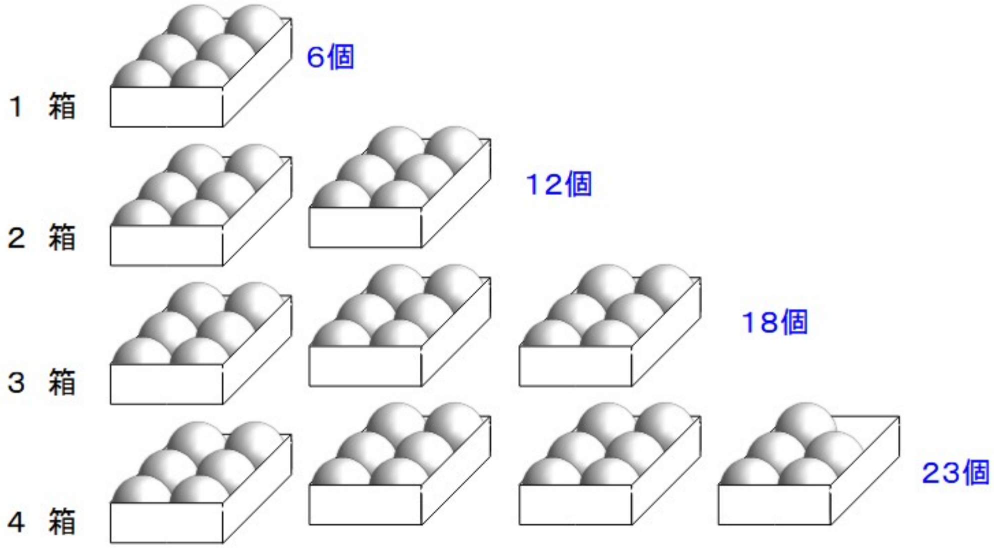
いずれにしても、350＝0.7 × □ ですから、□＝350÷0.7 となります。これを計算すると□＝500 となるので、350 kg の米を 1 人 0.7 kg ずつ配ると、500 人に配ることができることがわかります。

前の問題では１人分がわからないものの、人数が８人とわかっていたので、イメージがしやすかったのですが、この問題では逆に人数がはっきりしないので、イメージもはっきりしないかもしれません。

そのような時は、わからない部分を「？人」や「□人」などとしながら、できるだけイメージを作り、そしてそのようすを式で“表す”ことを考えましょう。

問題：ボールが23個あります。１箱にボールを６個ずつ入れていきます。
全部のボールを箱に入れるには、何箱あればよいでしょう。
(令和３年度全国学力・学習状況調査算数問題４(1))

ボール23個を、６個入る箱に入れていくようすをイメージしてみると、次のようになります。



これを見ると、23個のボールを箱に入れるには、４箱が必要であること、ただし最後の箱には５個だけ入っていることがわかります。

これは、6×3＝18では23より小さく、6×4＝24では23より大きくなることからも、わかります。算数で学習した不等号を使うと、次のようにも表せます。

$$6\times3 < 23 < 6\times4$$

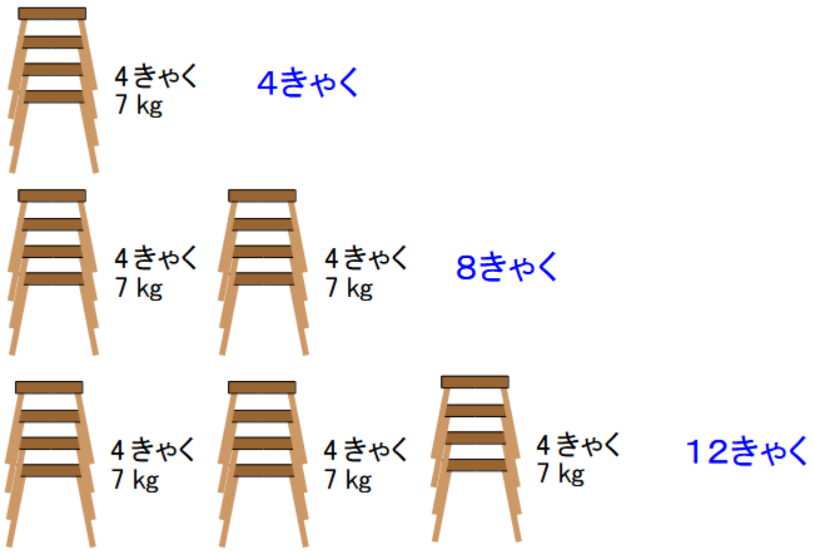
逆に言えば、6×□の積がだいたい23に等しいくなるような□を求めれば、箱のおよその個数がわかります。

そこでこうした□を見つけるために、とりあえず23÷6を計算すると、答えは「3　あまり5」、あるいは「約3.83」となります。この結果から、３箱だと５個が入らないことや、３箱より少し多く必要であることがわかります。

つまり、23÷6の計算で、上のイメージのうち、６個ぴったり入った箱の数を知ることができます。その上で、残った分をどうするかを考えればよいのです。

問題：いす 4 きゃくの重さをはかったら、7 kg でした。
このいす 48 きゃくの重さは、何 kg ですか。
(令和 5 年度全国学力・学習状況調査算数問題 1 (3)類題)

いす 4 きゃくで 7 kg なので、もう 4 きゃくあわせて 8 きゃくになったら、7 kg の 2 倍の 14 kg になります。さらに 4 きゃくあわせて 12 きゃくになったら、7 kg の 3 倍の 21 kg になるでしょう。



上のイメージのように、いすが 4 きゃくの 2 倍になると重さも 7 kg の 2 倍に、いすが 4 きゃくの 3 倍になると重さも 7 kg の 3 倍になります。そこで、48 きゃくが 4 きゃくの何倍かがわかれば、重さは 7 kg をその倍だけすれば求まることになります。

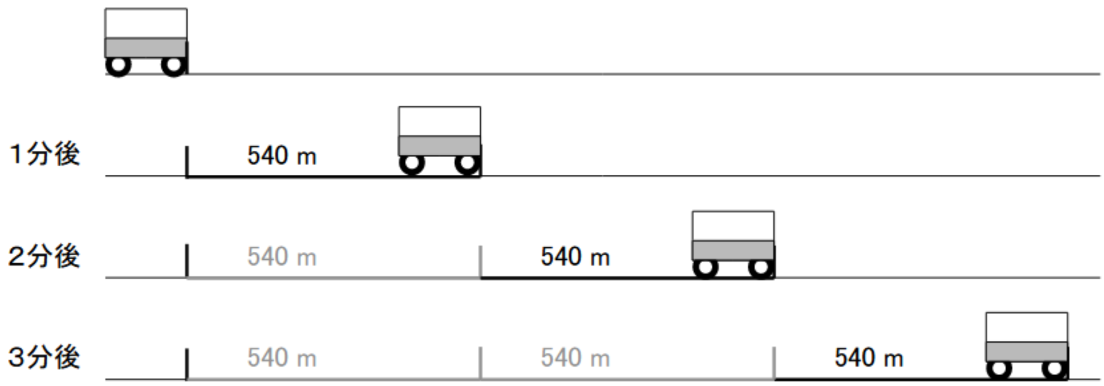
では 48 きゃくは 4 きゃくの何倍でしょうか。4 きゃくを何倍したら 48 きゃくになるかと考えてみます。この時「何倍」を「□倍」と表すと、48＝4×□なので、ここから□＝48÷4 を計算すればよいことがわかります。

（参考：いす 4 きゃくの何倍？）

48 きゃくは□＝48÷4＝12 より 4 きゃくの 12 倍です。したがって、重さは 7 kg の 12 倍になります。7×12＝84 なので、48 きゃくの重さは 84 kg と求めることができます。

問題：分速 540 m で走るバスが、2700 m を進むのには何分間かかりますか。
(令和 3 年度全国学力・学習状況調査算数問題 1 (5))

分速 540 m ということは、1 分間で 540 m 進みます。次の 1 分間でも 540 m 進むので、2 分後には 540 m の 2 倍である 1080 m 進んだ位置にいます。その次の 1 分間でも 540 m 進むので、3 分後には 540 m の 3 倍である 1620 m 進んだ位置にいます。



2700 m 進むのにかかる時間を求めるには、結局、540 m の何倍で 2700 m になるかがわかればよいことになります。

式で表すために「何倍」を「□倍」と表しておくと、今の場面は次のように式で表すことができます。

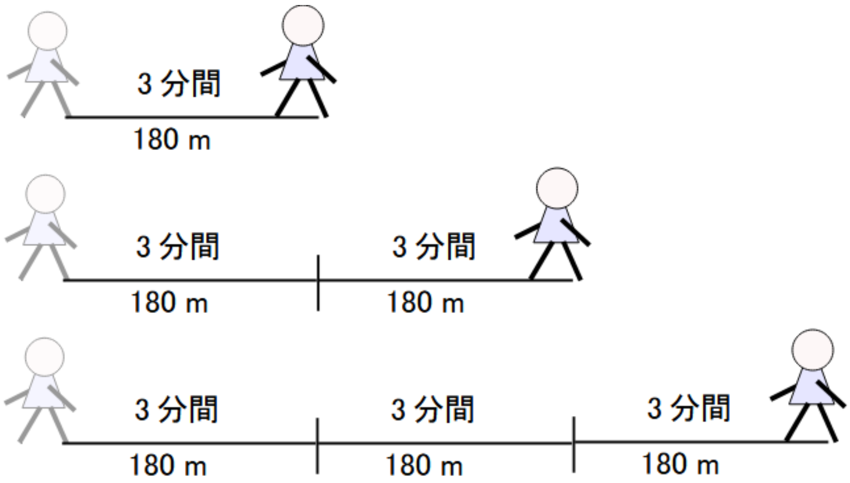
2700 m＝540 m×□

ここから□＝2700÷540 となり、2700÷540＝5 より 5 分間かかることがわかります。

「時間＝距離÷速さ」という公式をおぼえていれば、もちろんそれを使って求めればよいでしょう。ただ、もしもかけ算かわり算かがあいまいだったり、どれをどれで割るのかの自信がない時は、上のように場面をイメージして、イメージを少しふくらませてから式に表してみると、場面と式のつながりがわかるので安心です。

問題：ユウさんは、3 分間で 180 m 歩きました。同じ速さで歩き続けると、
1800 m を歩くのに何分かかりますか。
(令和 6 年度全国学力・学習状況調査算数問題 4 (2))

3 分間で 180 m 歩いたのと同じ速さで歩き続けるので、もう 3 分間歩いたら 6 分後には、180 m の 2 倍の 360 m のところにいることになります。さらに 3 分間歩いたら 9 分後には 180 m の 3 倍の 540 m のところにいることになります。



このように歩き続けて、歩いた距離が 1800 m になる時間を求めればよいわけです。

上のイメージのように、時間が 3 分間の 2 倍になると歩いた距離は 180 m の 2 倍に、時間が 3 分間の 3 倍になると歩いた距離も 180 m の 3 倍になります。ということは、逆に、1800 m が 180 m の何倍かがわかれば、かかる時間は 3 分間をその倍だけすれば求まりそうです。

1800 m は 180 m の 10 倍ですから、かかる時間は 3×10＝30 で 30 分ということになります。

【補足】倍の求め方　（参考：割合の問題の解き方）

180 m を何倍したら 1800 m になるかを考えます。この時「何倍」を「□倍」と表すと、1800＝180×□なので、ここから□＝1800÷180 を計算すればよいことがわかります。何倍かがわからなくなったら、□倍で考えてみましょう。

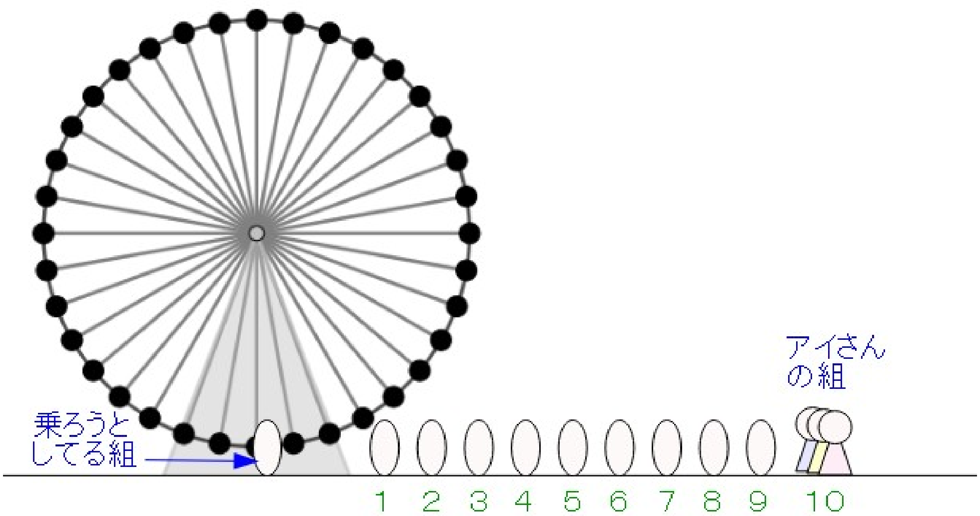
問題：観覧車にゴンドラが36台ついています。ゴンドラ1台にお客さんは1組ずつ乗ります。4人組なら4人いっしょに乗るということです。

前のゴンドラが出発してから、次のゴンドラが来るのに20秒かかります。

アイさんたちはこの列に並んでいますが、今乗ろうとしている組より10組後にいます。アイさんの組がゴンドラに乗ることができるのは何秒後になりますか。

(令和元年度全国学力・学習状況調査算数問題4(2))

ゴンドラとそこに並んでいる人のようすをイメージすると、次のようになります。ただし、黒い●はゴンドラを表しています。またピンクの長丸は1組のお客さんを表しています。



今、乗ろうとしている組の次の組が1組目で、アイさんたちは10組目になります。

次のゴンドラが来るのに20秒かかるので、1組目の組が乗ることができるのは20秒後です。2組目の組が乗ることができるのは、さらにその20秒後なので40秒後となります。3組目ならさらに20秒後なので、60秒後です。

乗るまでに、20秒の待ち時間が何回あるかを考えればよさそうです。

このようにイメージをふくらませてくると、何番目かの組が乗ることができるまでにかかる時間は、20 秒に番目の数をかけたものになることがわかります。

アイさんたちの組は今乗ろうとしている組の 10 組後なので、乗ることができるまでには、20 秒の待ち時間が 10 回あることになります。20 秒の 10 個分の時間を求めるので、それを式で表すと

20 秒×10

となります。20×10＝200 なので、200 秒、つまり 3 分 20 秒だけ待つ必要があることがわかります。

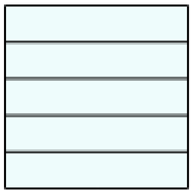
アイさんたちの組が何秒後に乗ることができるかを求めるためには、前の組が乗ってから次の組が乗ることができるまでの時間、つまり次のゴンドラが来るまでの時間の 20 秒と、アイさんたちの組が何組目にあたるか**だけ**がわかればよかったのです。つまり、ゴンドラが全部で 36 台ついていることは、問題を考える上でまったく必要がありませんでした。

これが必要のない情報だとわかる人は、場面のイメージを考える時に、36 台のゴンドラをイメージにふくめる必要はありません。

ただ、場面をイメージしてみないと、何が必要で何が必要でないかがわからない時もあります。逆に言えば、何が必要で何が必要でないかを確認する上でも、場面をイメージすることはたいせつです。

例えば、ゴンドラが次々に来て、そこにお客さんが乗り込んでいくようすを、アニメーションのようにイメージするだけでもよいでしょう。そして、1 台くるごとに「20 秒」「40 秒」と時間をカウントしていくと、それだけで乗るまでに待つ時間がわかるような気がしてきます。そんな気がしたら、まずはお客さんが乗りこんで時間が経過していくようすの部分**だけ**、イメージをさらにふくらませてみるとよいでしょう。

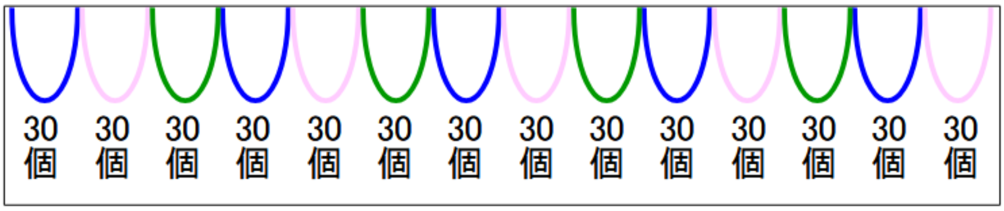
問題：折り紙を右のように５等分をして、それをまるめた輪を作ります。その輪をつなげていって 30 個の輪で「輪かざり」１本とします。



かべに輪かざりをたるませながら 14 本つけて、かべをかざろうと思います。折り紙は何まい必要ですか。

(平成 30 年度全国学力・学習状況調査算数Ｂ問題５(1))

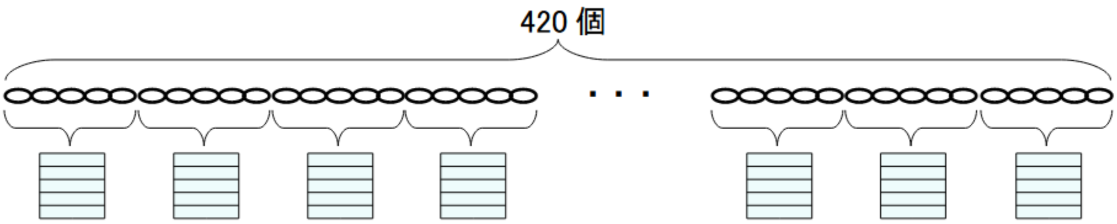
かべに輪かざりを 14 本つけるようすをイメージすると下の図のようになります。またそれぞれの輪かざりは 30 個の輪でできています。



１本の輪かざりは 30 個の輪でできています。また、それぞれ折り紙からは 5 個の輪が作られます。ですから、折り紙のまい数と、輪かざりの本数をつなぐのは、輪の個数ということになります。

上のイメージは 30 個の輪のあつまりが 14 個あることを表しています。ここから、全部の輪の個数は 30 個の 14 倍で求まることがわかります。30×14 を計算すると 420 となるので、14 本の輪かざりを作るには輪が 420 個、必要であるとわかります。

では輪を 420 個作るには、折り紙は何まい必要でしょうか。輪が 5 個で折り紙が 1 まいなので、以下のようなイメージになります。

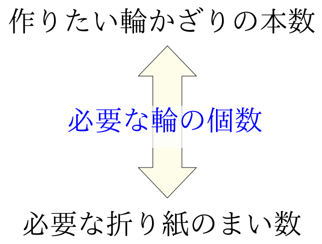


折り紙のまい数を“とりあえず”「□まい」と表しておくと、5個の輪の□倍が420個ということですから、このイメージは次のように式で表すことができます。

420個＝5個×□

420＝5×□なので、□＝420÷5となります。これを計算すると420÷5＝84ですから□＝84、つまり<u>輪を420個作るには折り紙は84まい必要</u>であるとわかります。

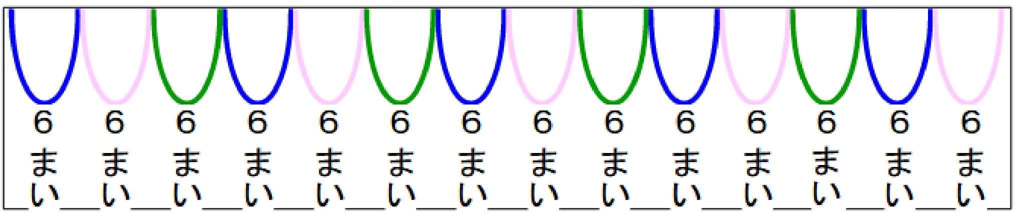
今の問題では必要な折り紙のまい数を求めました。ただまい数と輪かざりの本数は直接はつながっていないので、２つをつなぐものとして「輪の個数」を考えました。



場面をイメージした時に、考えている２つの量が直接、関係づけられない時は、その２つをつなぐ第三の量を見つける必要があるかもしれません。それを見つけるためにも、場面のイメージをふくらませることがたいせつです。

なお、１本の輪かざりを作るのに輪が30個必要であること、また折り紙１まいから輪は5個できることを思い出すと、結局、1本の輪かざりを作るのには折り紙が6まい必要であることがわかります。

このことを使って最初のイメージをふくらませると、次のようになります。



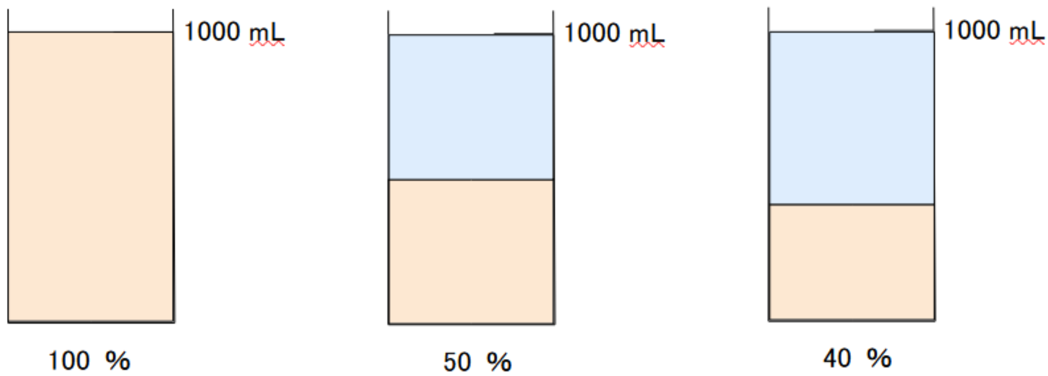
つまり折り紙6まいでできる輪かざりが14本あるので、必要な折り紙のまい数は6まいの14倍です。

6×14＝84ですから、この考え方でも14本の輪かざりを作るには折り紙が84まい必要であることがわかります。

問題：オレンジの果汁が 40 %含まれている飲み物があります。
この飲み物 1000 mL には、果汁が何 mL 入っていますか。
(令和 4 年度全国学力・学習状況調査算数問題 2 (2))

果汁が 100 %なら飲み物全部が果汁ということでした。また果汁が 50 %なら、飲み物の半分の量の果汁が入っているということです。今の飲み物は果汁が 40 %ですから、50 %より少ない、つまり半分よりも少ないことはわかります。

まぜる前の状態をイメージしてみると、100 %、50 %、40 %は、次のようになるでしょう。オレンジ色の部分が果汁を、水色の部分が水を表しています。



40 %が基準となる量の 0.4 倍であることがわかっていれば、今の場面での基準となる量 1000 mL の 0.4 倍を求めればよいでしょう。つまり、1000×0.4＝400 として 400 mL を求めるという考え方です。

もしも、かけるのか割るのかよくわからないとか、いくつをかけたらよいのかよくわからないという場合は、上のイメージをもとに、さらにイメージをふくらませることで、答えを見つけることもできます。

50 %は半分のことでしたが、10 %は基準となる量の $\frac{1}{10}$ 倍です。今は基準となる量は 1000 mL なので、10 %は 100 mL となります。そして 40 %はその 4 倍なので、400 mL とわかります。

100 %や 50 %からイメージをふくらませて、10 %や、さらに 1 %の量をイメージすると、何%かの量はわかりやすくなります。

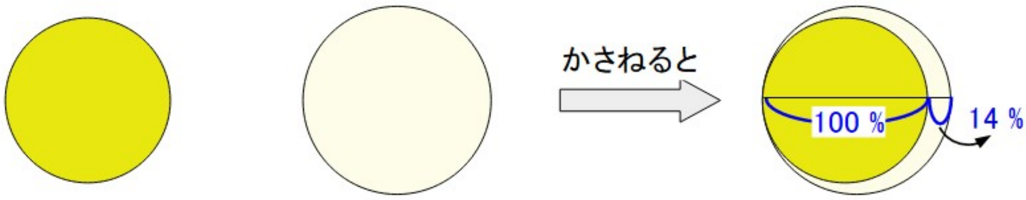
問題：　月は見える大きさが1年を通してちょっとだけ変わっています。いちばん大きく見える時の直径は、いちばん小さく見える時の直径をもとにして約14 %長いとされます。
今、硬貨を使って、この時の違いを表そうと思います。各硬貨の直径は次のようになっています。

硬貨	1円玉	5円玉	10円玉	50円玉	100円玉	500円玉
直径 (mm)	20.0	22.0	24.5	21.0	22.6	26.5

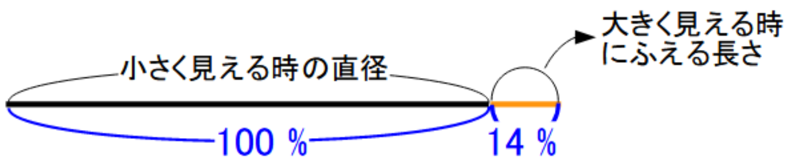
いちばん小さく見える時を1円玉で表すとすると、直径が14 %長くなっているいちばん大きく見える月は、どの硬貨で表すのが、よいですか。

(平成29年度全国学力・学習状況調査算数問題5 (2))

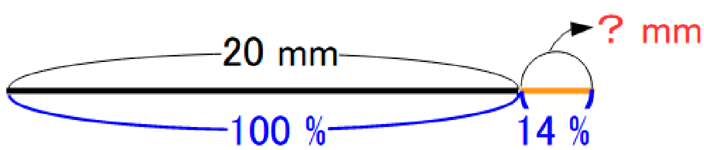
いちばん小さく見える時の直径をもとにすると、いちばん大きく見える時の直径が14 %長いというようすは、次のようにイメージできます。



今、直径の長さについて考えていますから、直径の部分だけぬき出して、長さについてイメージをよりはっきりさせると次のようになります。



いちばん小さく見える時の月を1円玉で表すとすると、その直径は20 mmです。このことからイメージをふくらませると、次のようになります。

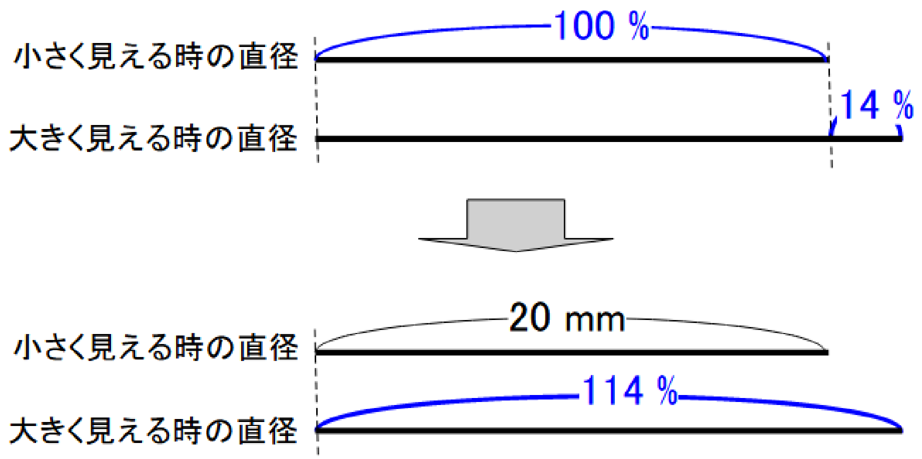


100 %の長さが 20 mm ですから、その 14 %の長さは、20 mm の 0.14 倍の長さということになります。これは 20×0.14 で求まります。20×0.14 を計算すると、20×0.14＝2.8 となります。つまり、長くなる 14 %の長さは 2.8 mm であるとわかります。

いちばん大きく見える時の月は、もとの 20 mm とその 14 %分の長さ 2.8 mm を合わせた長さなので、22.8 mm となります。これにもっとも近いのは直径が 22.6 mm の 100 円玉です。したがって、いちばん小さく見える時の月を 1 円玉で表した場合、いちばん大きく見える時の月は 100 円玉で表すとよいことがわかりました。

100 %の長さはもとにする 20 mm ですから、10 %はその 10 分の 1 で 2 mm となります。さらに 5 %ならその半分の 1 mm ですから、15 %の長さは 3 mm です。上では 14 %を 2.8 mm と求めました。これは 15 %の 3 mm より少しだけ短いので、話のつじつまは合っています。

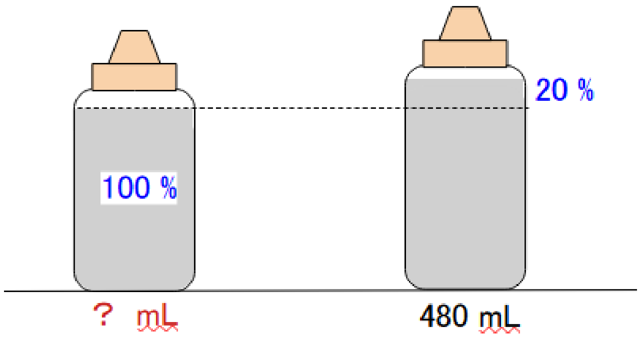
いちばん大きく見える時の月の直径が 14 %長いということから、次のようにイメージすることもできます。



つまりいちばん大きく見える時の直径は、いちばん短く見える時の直径の 114 %の長さです。これは 20 mm の 1.14 倍の長さですから、20×1.14 で求めることができます。これを計算すると 20×1.14＝22.8 ですから、上と同じ結果がえられます。

問題：せんざいが 20 %増量して売っています。
増量後のせんざいの量は 480 mL です。
増量前のせんざいの量は何 mL ですか。
(平成 27 年度全国学力・学習状況調査算数 B 問題 2 (2))

20 %増量ということですから、増量する前の量よりも 20 %だけ多く入っているということです。この時、100 %の量は増量する前のもともとの量です。この場面をイメージすると、次のようになります。



ここから増量後の量は、もともとの量である 100 %分の量と、増量した 20 %分の量をあわせた量ということになります。その合わせた量は 480 mL とわかっています。

そこで“とりあえず”もとの 100 %分の量を「□ mL」と表して考えてみます。まずもともとの量はこの□ mL ですが、100 %が基準にする量の 1 倍であることを強調するならば、□ mL×1 と表すことができます。またもとの量の 20 %はもとの量の 0.2 倍ということですから、これは□ mL×0.2 と表すことができます。そしてそれらを合わせた量が 480 mL なので、上のイメージは、次のように式で表すことができます。

$$480\ \mathrm{mL} = \square\ \mathrm{mL} \times 1 + \square\ \mathrm{mL} \times 0.2$$

ここで $4\times0.12+4\times0.38=4\times(0.12+0.38)=4\times0.5$ などと工夫して計算したことを思い出すと、今の式でも□の部分が共通しているので、次のように表すこともできます。

$$480\ \mathrm{mL} = \square\ \mathrm{mL} \times (1+0.2)$$

ここから 480＝□×(1＋0.2)＝□×1.2 ですから、□＝480÷1.2 となります。これを計算して 480÷1.2＝400 なので、□＝400、つまり増量前のもとの量は 400 mL であったことがわかります。

20 %増量後の量はもとの量の 120 %になります。これはもとの量の 1.2 倍のことです。もとの量が 400 mL とわかりましたので、その 1.2 倍を求めてみると、400×1.2＝480 で、確かに 480 mL になっています。

【補 足】

120 %の量がわかっているので、20 %をのぞいた量、つまり 480 mL の 80 %を求めれば、100 %の量であるもともとの量がわかるような気もします。

しかし実際にはそうはなりません。なぜでしょう。

上のようにもともとの量を□ mL と表して考えてみます。

まず□ mL の 120 %の量は□ mL の 1.2 倍なので、□ mL×1.2 で求まるのでした。次に 80 %の量はその 0.8 倍ですから、□ mL×1.2 に 0.8 をかけた量、つまり (□ mL×1.2)×0.8 となります。

$$(\square\ \mathrm{mL}\times 1.2)\times 0.8=\square\ \mathrm{mL}\times(1.2\times 0.8)=\square\ \mathrm{mL}\times 9.6$$

ですから、480 mL の 80 %分を求めると、もともとの量の 96 %の量にしかならないのです。

増量した 20 %が「もともとの量の 20 %」なのに対して、80 %を考えている時にへらしている 20 %は「増量後の量の 20 %」なのです。そして増量後の量の方が基準にする量が多くなるので、「もともとの量の 20 %」よりも「増量後の量の 20 %」の方が多くなり、それをひいて 80 %分を求めると、へらしすぎになってしまい、もとの量には戻りません。

何%分の量を考える時は、いつでも「基準にする量」が何かに注意することがたいせつです。

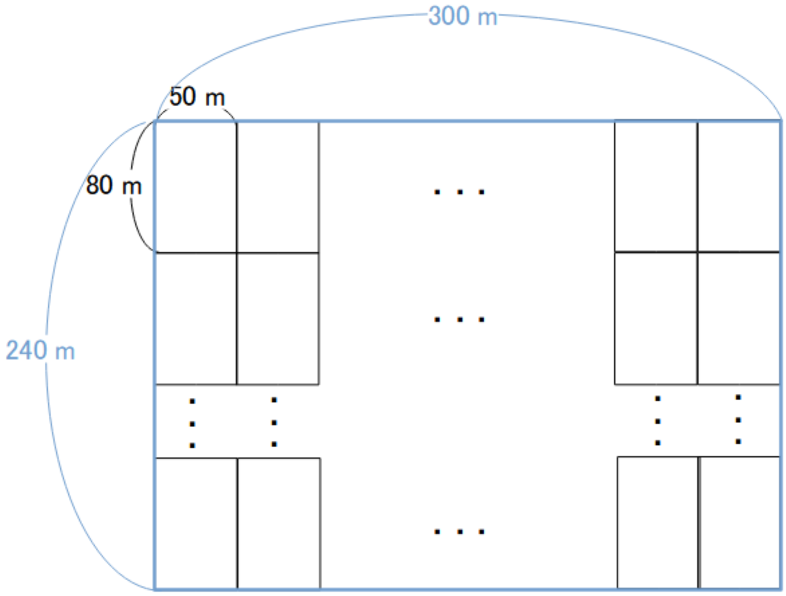
問題： ケイさんが国立競技場の面積を学校の校庭の面積と比べたところ、18 倍であることがわかりました。校庭は縦 80 m、横 50 m の長方形です。

ケイさんは、18 倍をイメージしやすくするために、校庭 18 個をきれいに並べることを考えたところ、縦 240 m、横 300 m の大きな長方形にできることがわかりました。

この時、ケイさんは校庭を縦に何個、横に何個並べると考えたのでしょうか。

(令和 2 年度全国学力・学習状況調査算数問題 1 (5))

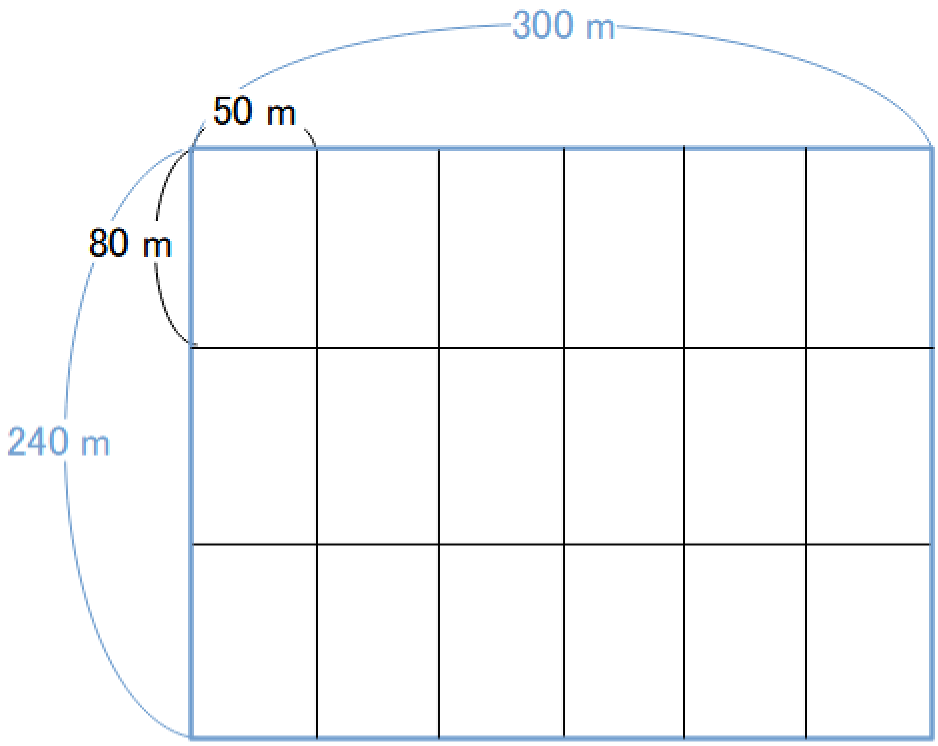
校庭である縦 80 m、横 50 m の長方形をきれいにならべて、縦 240 m、横 300 m の大きな長方形にしたところをイメージしてみます。



縦は 80 m を何個か並べて 240 m になったのですから、個数を“とりあえず”□個と表すと、縦のようすは 240＝80×□ と式で表すことができます。ここから□＝240÷80 となるので、これを計算して縦は 3 個並べたことがわかります。

横は 50 m を何個か並べて 300 m になったのですから、個数を“とりあえず”△個と表すと、横のようすは 300＝50×△ と式で表すことができます。ここから△＝300÷50 となるので、これを計算して横は 6 個並べたことがわかります。

つまり、実際は、ケイさんは次のように並べたことがわかります。



240 m が 80 m の何倍かを求めることからすぐに 240÷80 と式を立ててもよいのですが、もしもどのような計算をしてよいか自信がない時は、上のように、並べた後のようすをイメージして、イメージを式で表すことを考えると、場面に合った式を考えやすくなる時があります。

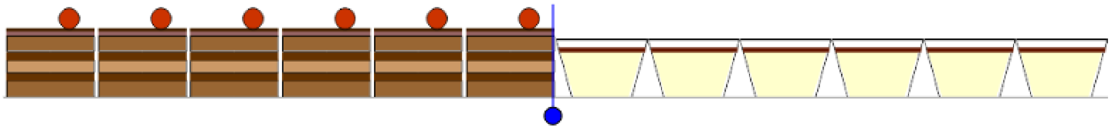
リボンの本数やジュースを分ける問題でも、切った後や分けた後のようすをイメージし、それを式で表してみました。算数では□をうまく利用することで、「完成後」のようすを、いくつかがわからない場所があっても、表すことができるようになりました。□が使えるようになって式の表現力がパワーアップしたことを、おおいに活用しましょう。

ちょっとした応用：鶴亀算、和差算、旅人算など

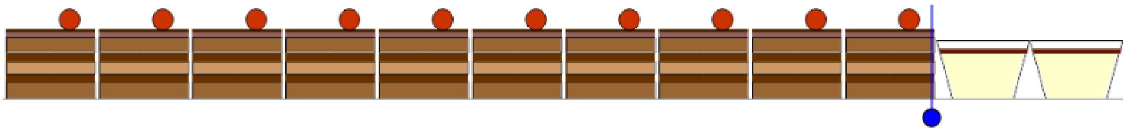
もう少しむずかしい文章題についても、考えてみましょう。

つるかめ算：1 個 200 円のケーキと 1 個 120 円のプリンをあわせて 12 個買ったら、代金は 2000 円でした。ケーキとプリンをそれぞれ何個買ったでしょう。

ケーキとプリンをあわせて 12 個買ったようすをイメージしてみましょう。ただ、それぞれ何個買ったのかはわからないので、はっきりとはイメージできませんが、とりあえず、



とか、あるいは



と、だいたいのようすをイメージしてみます。(参考：ケーキとプリンの代金)

またイメージをふくらませるために、それぞれの代金も“とりあえず”求めてみましょう。

上の場合はケーキが 6 個とプリンが 6 個ですから、代金は

$$200\times6+120\times6=1920$$

で 1920 円となります。代金は 2000 円でしたから、これですと安すぎます。代金を高くするには 120 円のプリンの個数を減らして 200 円のケーキの個数をふやすことが考えられます。

下の場合はどうでしょう。ケーキが 10 個とプリンが 2 個ですから、代金は

$$200\times10+120\times2=2240$$

で 2240 円となります。これだと 2000 円より高いので、ケーキの個数が多すぎるようです。

まだ答えにはたどりついていませんが、だいぶ場面のイメージができてきま

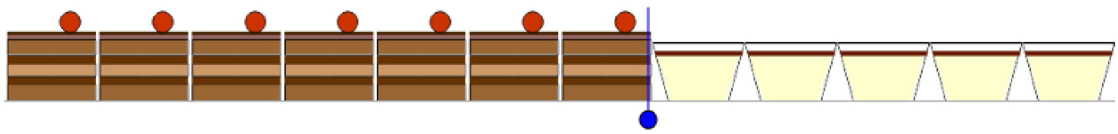
した。プリンが多すぎると 2000 円より安くなり、ケーキの個数が多すぎると 2000 円より高くなってしまいます。

またプリンをケーキに交換した時の経験を振り返ると、120 円のプリンを 200 円のケーキに変えると、合計の代金は 80 円高くなります。実際、上ではケーキの個数を 4 個ふやしたら、代金が 320 円高くなりました。80×4＝320 なので 320 円高くなったのです。

ここまでイメージがふくらんでくると、もうどうしたらよいかが見えてきます。ケーキとプリンを 6 個ずつ買ったら 1920 円でしたので、代金を 80 円ふやせば求めたい個数になります。ということは、プリン 1 個をケーキ 1 個と交換すればよいでしょう。つまり、ケーキを 7 個、プリンを 5 個買えば、代金は 2000 円になるはずです。確かめてみます。

$$200\times7+120\times5=2000$$

と確かに代金は 2000 円になりました。



あるいは、ここまで作ってきたイメージを使うと、別の考え方もできます。ケーキ 1 個をプリン 1 個に変えれば代金は 80 円安くなります。ケーキ 10 個とプリン 2 個の時は代金が 2240 円でしたから、2000 円にするには 240 円安くしたいのです。1 個の交換で 80 円安くなりますから、240÷80＝3 で 3 個の交換で 240 円安くなるはずです。つまり、ケーキ 3 個をプリン 3 個に変えて、ケーキを 7 個、プリンを 5 個にするとよいことがわかります。

1 個の交換で代金が 80 円高くなったり、安くなったりするというところまで、イメージをふくらませることができたら、あとは、適当な個数の状態から出発して、2000 円になるように個数を調整すればよいのです。

「全部をプリンだと思って」といった解き方も、実はこれと同じです。解き方をおぼえるのもいいのですが、場面のようすをイメージし、そのイメージをふくらませていくことでも、解決の方針を見つけることはできるのです。

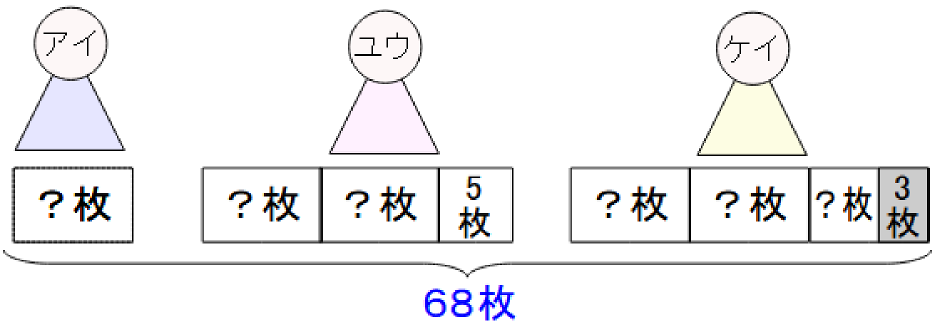
和差算：アイさん、ユウさん、ケイさんがそれぞれ折り紙を持っています。

ユウさんはアイさんの２倍より５枚多く持っています。ケイさんはアイさんの３倍より３枚少なく持っています。３人の折り紙を全部合わせると 68 枚です。

３人はそれぞれ折り紙を何枚持っているでしょう。

今の場面の様子をイメージしたいのですが、各自の持っている枚数はわかりません。ただ全部で 68 枚であることと、ユウさんとケイさんの持っている枚数がアイさんの枚数に比べてどのくらいかはわかっています。

アイさんの枚数との関係について情報があるので、アイさんの枚数をもとに場面のようすをイメージしてみることにします。すると、次のようになります。



これを見ると、３人が持っている折り紙は、アイさんの枚数「？枚」の６つ分に、ユウさんの５枚を加え、そこからケイさんの少ない分の３枚をひいた枚数であることがわかります。

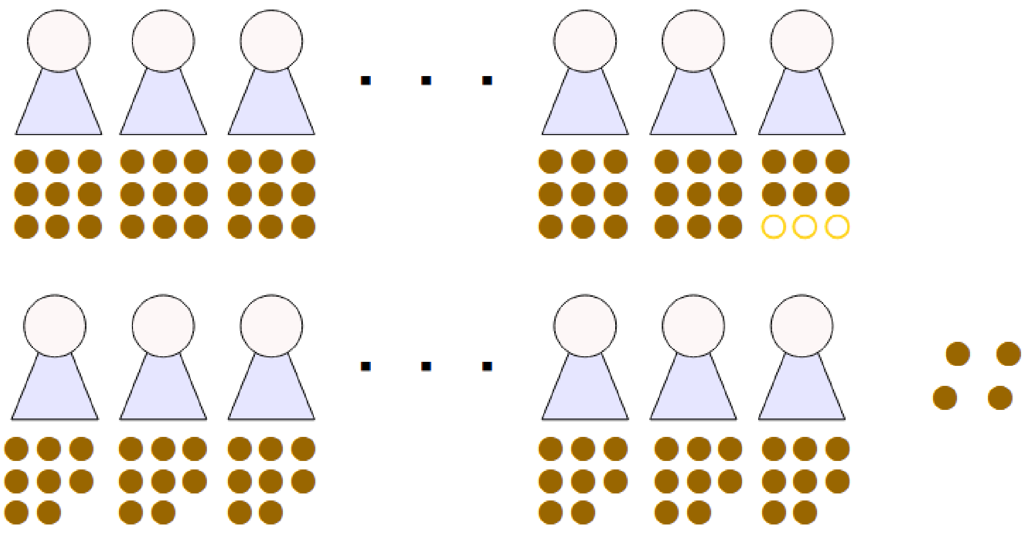
さらにイメージをふくらませると、ユウさんの５枚のうち３枚をケイさんにかしてあげると、ケイさんの枚数が（一時的に）アイさんの枚数の３倍になります。そして、３人の枚数の合計はアイさんの枚数「？枚」の６つ分に、ケイさんのところに残った２枚をあわせたものになります。これが 68 枚だというのです。

したがって「？枚」は、68 枚からケイさんの残った２枚をのぞいて、６等分した枚数です。(68－2)÷6＝11 なので、アイさんの枚数は 11 枚となります。またここからユウさんは 27 枚、ケイさんは 30 枚持っていることもわかります。

過不足算：アイさんは栗拾いに行ったので、みなにおすそわけをしようと思いました。
　１人に９個ずつ配ろうとしたら、３個足りなくなってしまいました。そこで今度は８個ずつ配ったら、みなに配ることができて、しかも４個あまりました。
　アイさんは栗を何個持っていて、何人に配ったのでしょうか。

今の場面の様子をイメージしたいのですが、全部の栗の個数も、配ろうとしている人数もわかりません。ただ、最初は9個ずつ配ろうとして3個足りなくなったこと、次には8個ずつ配ったら4個余ったことはわかります。また、あたりまえですが、9個ずつ配ろうとした時の人数と、8個ずつ配った時の人数は同じです。

ここまでのことから、“とりあえず”イメージしてみると、次のようになります。なお図の中の○はたりないことを表しています。



9個ずつ配った時と、8個ずつ配った時のようすをくらべて見ると、次のようなことに気づきます。9個ずつもらった人から1個ずつ返してもらって、そのうち2個を最後の人にあげると、全員が8個ずつになります。そして、その上でまだ残ったのが、下の図のあまりの4個になるはずです。

つまり最後の人以外の人から返してもらった栗の個数は、最後の人にわたした 2 個と、あまりになった 4 個の合計 6 個です。ですから、最後の人をのぞくと、全部で 6 人いたことがわかります。これに最後の人を加えた 7 人が、アイさんが栗を配ろうと思った人数です。

7 人の人に 8 個ずつ配って 4 個あまるので、アイさんが持っていた栗の個数は、8×7＋4 で求まります。計算すると 60 個となります。アイさんは<u>60 個の栗を 7 人の人に配った</u>のでした。

確かめてみます。
栗を 9 個ずつ 7 人に配ろうとすると 9×7＝63 で 63 個必要ですから、60 個では 3 個たりません。栗を 8 個ずつ 7 人に配ると 56 個必要ですから、60 個だと 4 個あまります。

２通りのくばり方のようすをイメージし、それらをくらべることで、さらにイメージをふくらませていくと、知りたかった情報も少しずつ見えてきます。

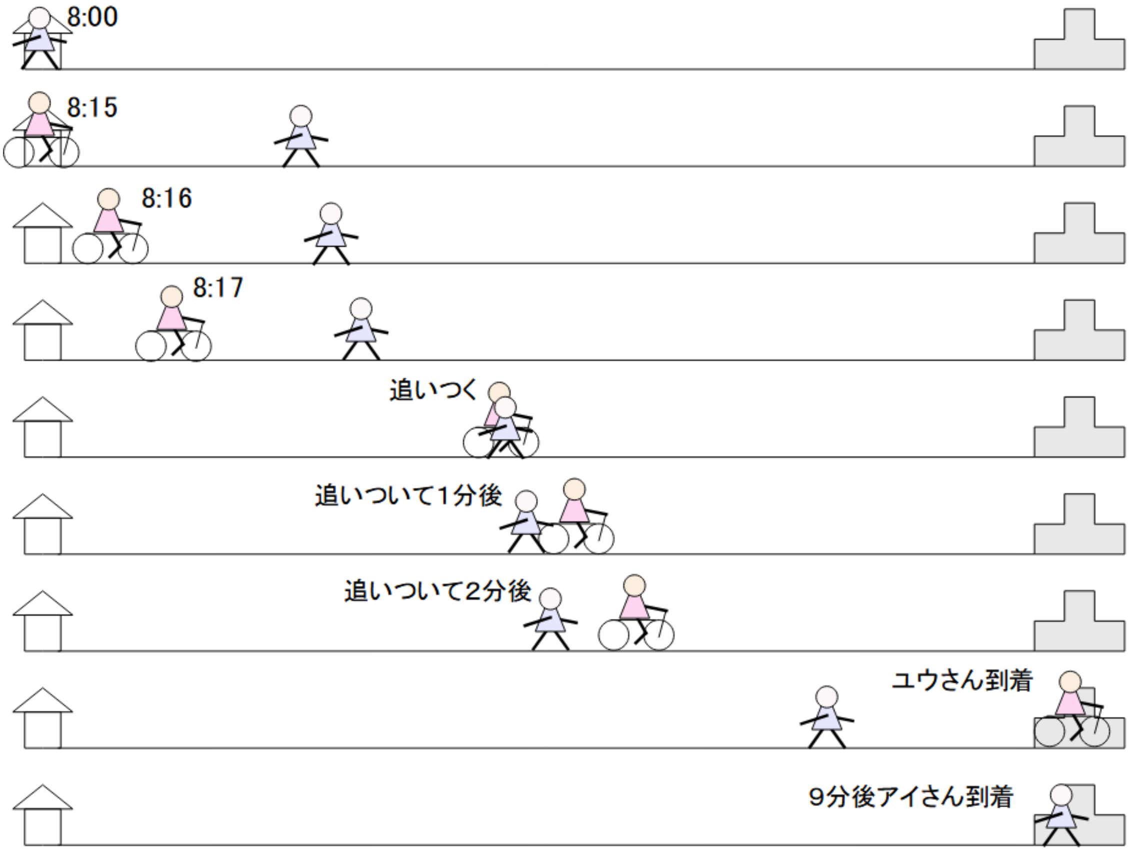
旅人算：アイさんは午前8時に、分速60 m で歩いて家から学校へ向かいました。寝坊した妹のユウさんは午前8時15分に自転車で家を出発し、分速150 m の速さで同じ学校に向かいました。

ユウさんは、アイさんを途中で追い越し、アイさんよりも9分早く学校へ着きました。

(1) ユウさんがアイさんに追いついたのは何時何分ですか。

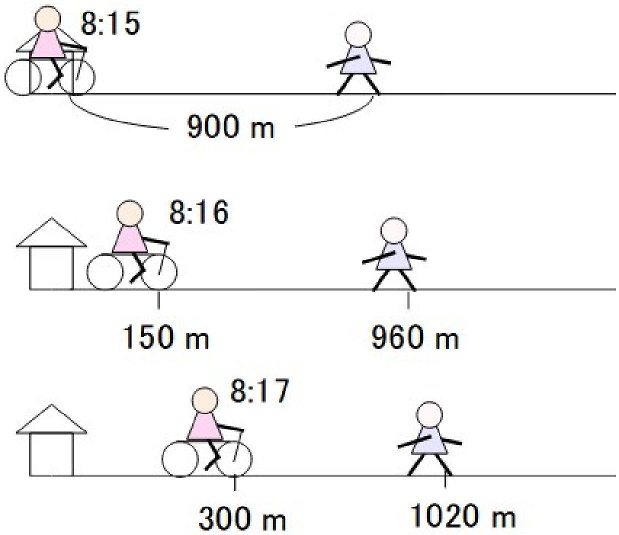
(2) 家から学校までの距離は何 m ですか。

２人のそれぞれ出発した時間や学校に向かう速さに注意をして、今の場面の様子をイメージすると、次のようになるでしょう。



さらに２人の速さから、いくつかの距離を知ることもできそうです。

まず、アイさんが出発したのは8時、ユウさんが出発したのは8時15分ですから、ユウさんが出発するまでにアイさんは15分間歩いています。アイさんは分速60 mで歩いていますから、15分間では60×15＝900で、900 m歩いていたことになります。



アイさんは分速60 mで歩き続けているので、8時16分には960 mの位置に、8時17分には1020 mの位置まで進みます。一方、ユウさんは自転車で分速150 mの速さで走っていますから、家を出た1分後の8時16分には150 mの位置に、2分後の8時17分には300 mの位置にいます。

ここまでイメージをふくらませると、２人の距離が少しずつ縮まっていることに気づきます。最初は900 mの差があったのですが、1分後は960 mと150 mですから、差は810 mに縮まっています。さらに2分後は1020 mと300 mですから、差は720 mとさらに縮まっています。

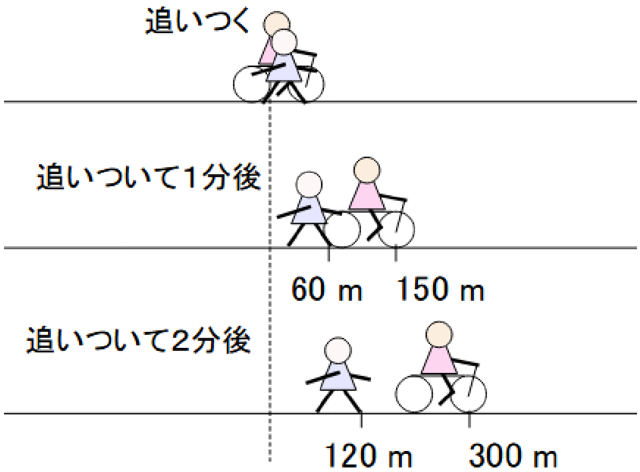
アイさんが分速60 mで歩いているのに対して、ユウさんは分速150 mで走っているので、150－60＝90で、２人の距離は1分間に90 mずつ縮まっていたのです。

ユウさんがアイさんに「追いつく」というのは、２人の距離が0 mになるということです。900 mあった差が1分間で90 mずつ縮まるなら、何分間で差が0 mになるでしょう。そのためには900÷90を計算すればよいでしょう。

これを計算すると、900÷90＝10 となります。ユウさんは家を出てから10 分後にアイさんに追いつくことがわかりました。ユウさんが 8 時 15 分に家を出発して 10 分後に追いついたので、追いついたのは 8 時 25 分ということになります。

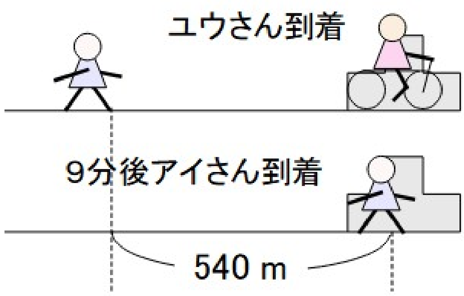
ちなみに、分速 150 m で走っていたユウさんが 10 分走って追いついたのですから、追いついた位置は、150×10＝1500 より、家から 1500 m の位置であることもわかります。

追いついた後のようすも同じように考えると、追いついてから 1 分後にはアイさんは追いつかれた位置から 60 m だけ進んでおり、ユウさんは 150 m 進んでいます。追いついてから 2 分後にはアイさんは 120 m だけ進み、ユウさんは 300 m 進んでいます。今度は 1 分間に 90 m ずつ差が開いていきます。



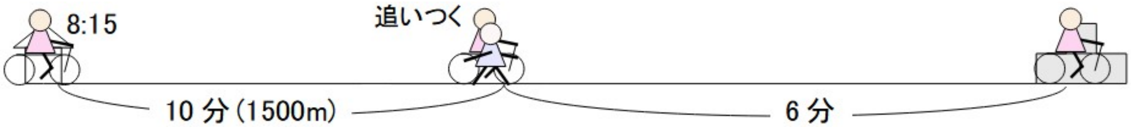
このように 1 分間に 90 m ずつ差が広がっていった結果、ユウさんが学校に着いた時には、アイさんはまだ学校よりも、かなり手前にいることになりました。

ではどれくらい手前にいたのでしょう。アイさんは、ユウさんが着いてから 9 分後に学校に着きました。つまり、ユウさんが着いた時にアイさんがいた場所は、分速 60 m のアイさんが 9 分間で歩くような距離です。これは 60×9＝540 より 540 m であるとわかります。



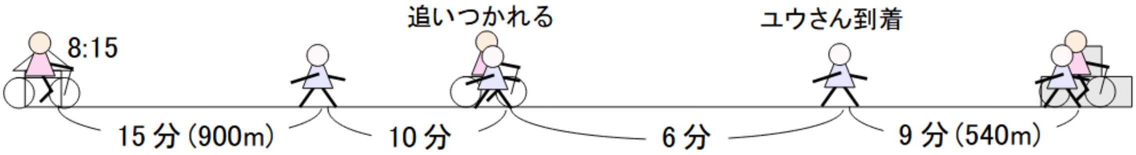
この 540 m はどうして生まれたのかと考えると、先ほど確認したように、ユウさんがアイさんに追いついた後も、２人の距離は 1 分間に 90 m ずつ開いていったことによりできたものです。1 分間に 90 m ずつ開いていって 540 m の差が生まれるには、540÷90＝6 より 6 分間が必要です。つまり、ユウさんはアイさんに追いついた後、6 分間走って学校に着いたことになります。

ここまでの動きをユウさんの視点でまとめると、次のようになることがわかりました。



結局、ユウさんは家から学校まで 16 分かかったことになります。分速 150 m で走っている人が 16 分かかったということは、150×16＝2400 より、家から学校までの距離は 2400 m であるとわかります。

ちなみにアイさんの視点でまとめる、次のようになります。



アイさんが家を出て 15 分後にユウさんが出発し、その 10 分後に追いつかれます。そこからアイさんが 6 分間歩いたところでユウさんはすでに学校に到着し、その後、さらに 9 分間歩いてアイさんも学校に到着するという流れです。全部の時間を合計すると 40 分歩いていたことになります。

分速 60 m のアイさんが 40 分間で歩いた距離は、60×40＝2400 で 2400 m となり、ユウさんの視点で求めた距離と一致します。

２人の人が違った動きをするので考えにくいところもありますが、それぞれの動きをイメージして、さらにそこからイメージをふくらませていくと、少しず

つですが情報が集まってきます。

流水算：川上(かわかみ)と川下(かわしも)に船着場があります。２つの船着き場は 10km 離れています。

ある船が船着場からもうひとつの船着場まで、その川を下る時は 1 時間かかります。また、川を上る時は 2 時間かかります。

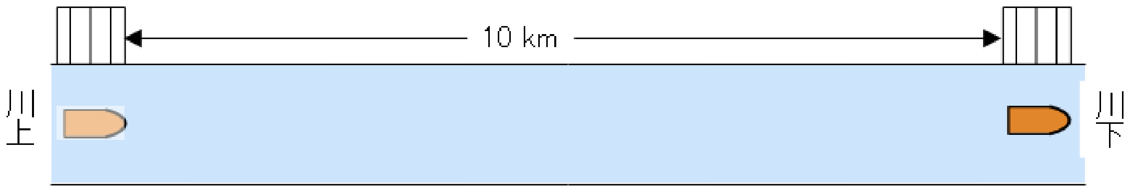
船の速さと川の流れの速さは常に一定だとします。

船の速さと川の流れの速さは、時速何 km ですか？

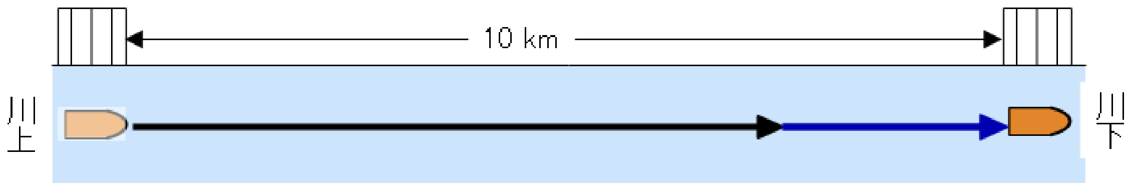
普通の道であれば、同じ速さで移動すれば行きも帰りも同じ時間になりそうです。川を下る時と上る時でかかる時間がちがうのは、下る時は川の流れにのって船自体の速さよりも少し速く移動できるのに対し、上る時は川の流れにさからって進むので、川の流れで少しずつ戻されてしまい、船自体の速さより少し遅くなってしまうからだと考えられます。

こうした川を移動する時の事情も考えながら、今の場面をイメージしてみます。

川上から川下に向かう際に 1 時間で着いたということは、 1 時間で 10 km 移動したということです。



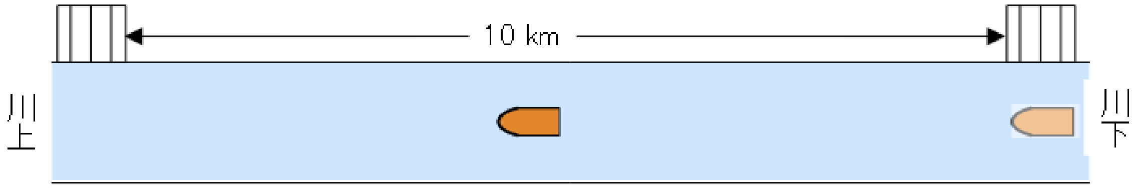
ただし、この 10 km のうち、何 km かは船自体が走ったことによるもので、残りの何 km かは、川に流されて移動した分だとイメージできます。



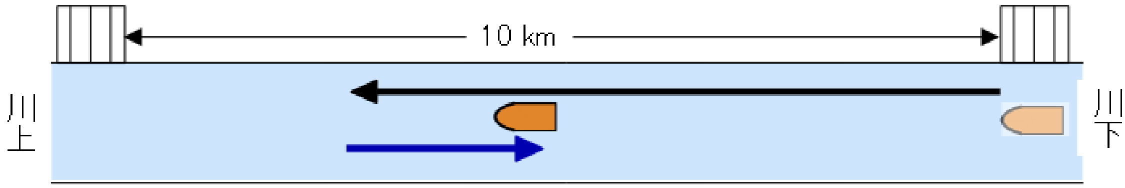
図の黒い矢印は船が自力で移動した距離を表し、青い矢印は川に流されて移動した分を表しています。もちろん、実際には、常に船は川下に向かって進みな

がら、同時に川下に向かって流されています。ここでは 1 時間の移動を考えているので、1 時間で進んだ全部の距離と、1 時間で流された全部の距離を表しています。

次に川下から川上に向かう際には 10 km を移動するのに 2 時間かかったということは、 1 時間では半分の 5 km だけ移動できたということです。



船自体は本当はもっと進んだはずなのですが、川の流れで何 km か川下に戻されてしまったので、結果として 1 時間で 5 km しか進めなかったとイメージできます。



ここでも、1 時間で進んだ全部の距離を黒い矢印で、1 時間で川下に向かって流された全部の距離を青い矢印で表しています。

ここまでイメージをふくらませたことで、川下に向かう時と、川上に向かう時の違いがすこしはっきりしてきました。

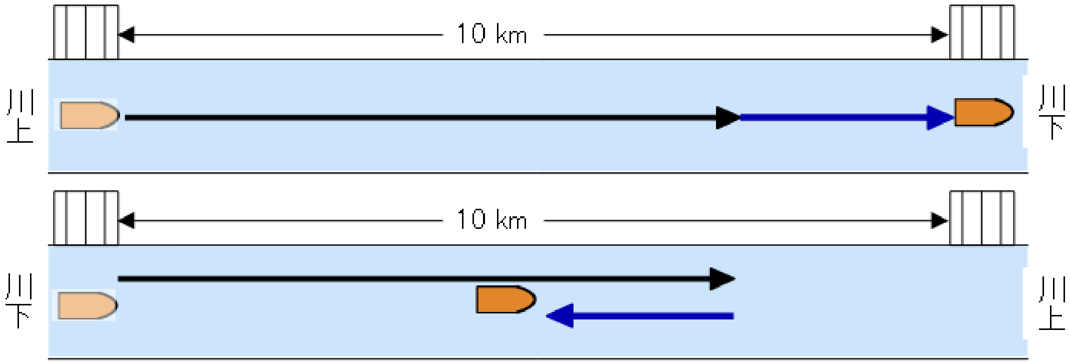
なお、上の図の矢印について、船の動きや川の流れのようすをイメージすると、次のようなこともわかります。

・黒い矢印は船が 1 時間に自力で移動した距離を表しているが、「船の速さは常に一定」と考えているので、川下に向かう時と川上に向かう時とでは等しくなっている。

・青い矢印は川の流れによって船が動いた距離を表しているが、「川の流れの速さは常に一定」と考えているので、川下に向かう時と川上の向かう時では等しくなっている。

つまり、２つの図で黒い矢印の長さも青い矢印の長さも同じであると考えられます。

ここで２つの場合を比べやすくするために、川上に向かう場合の図の向きを変えて、それから２つを並べてみると、次のようになります。



図を見ると、青い矢印の２つ分の長さは、ちょうど 10 km の半分の 5 km にあたることがわかります。つまり、青の矢印で表された距離の２つ分は 5 km です。ここから青の矢印で表された距離は 2.5 km となるので、川の流れの速さは時速 2.5 km であることがわかります。

黒の矢印に青の矢印を合わせると 10 km になること、そして今わかったように青の矢印の表す距離が 2.5 km であることから、黒の矢印で表された距離は 7.5 km となります。つまり、船の速さは時速 7.5 km です。

なお船の速さを“とりあえず”時速□ km、川の流れの速さを時速△ km と表しておくと、上の図のようすは次のような式で表すことができます。

□＋△＝10

□－△＝5

□－△＝5、つまり□から△をひくと 5 になるということは、5 に△を合わせると□になります：□＝5＋△。□＋△＝10 ですが、□は 5 と△を合わせたものに等しいので、□を「5＋△」で置きかえると、(5＋△)＋△＝10 となります。つまり△が２つで 5 になるので、ここから△を 2.5 と求めることもできます。

向きの異なる場合のイメージをくらべることが、考え方のポイントでした。

ニュートン算：いつも同じ割合で水がわき出る泉に水がたまっています。
この泉の水を、4 台のポンプでくみ出すと 15 分で泉が空になり、8 台のポンプでくみ出すと 7 分で空になります。
この泉を 5 分で空にするには、何台のポンプが必要ですか？

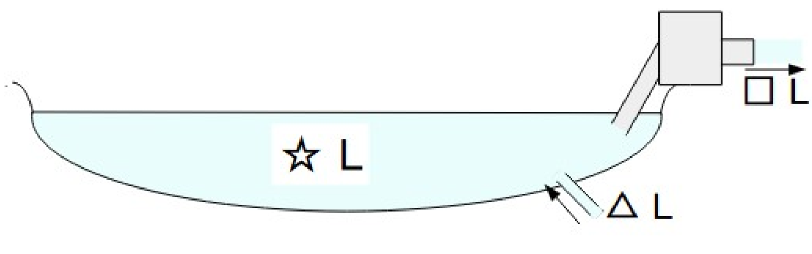
泉にたまっている水をポンプでくみ出すのですが、同時に泉から水がわき出てくるので、水が少しずつですが補給され続けるというイメージです。

１分間にポンプでくみ出す分の水は台数に比例してふえることになりますが、1 分間に泉からわき出てくる水の量はポンプの台数に関係なく一定です。ただし、くみ出すのに時間がかかるほど、わき出てくる水の量がふえてしまいますから、その分だけ、くみ出すのによけいに時間がかかってしまいます。

実際、４台のポンプで 15 分かかったのであれば、２倍である８台のポンプならその半分の時間になりそうですが、実際には半分の 7.5 分(7 分 30 秒)ではなく、7 分間ですんでいます。

泉にもともとあった水をポンプ何台かでくみ出しているが、同時にそこに泉から水がわき出ている、という様子をもっとはっきりとイメージしていきます。ただそのためには、もともとあった水の量、1 台のポンプがくみ出す水の量、泉からわき出てくる水の量が必要です。しかし、これらはどれも問題には示されていません。

そこでイメージを作るために、これらを“とりあえず”次のように表しておきます。まず泉にもともとあった水の量を「☆ L」と表します。1 台のポンプが１分間にくみ出す水の量を「□ L」と表します。1 分間に泉からわき出てくる水の量は「△ L」と表します。



４台のポンプの時は 15 分間で泉の水が空になりました。４台のポンプだと１分間に□ L×4 の水をくみ出すことができます。これで 15 分間くみ出した水の量(□ L×4)×15 が、もともと泉にあった水☆ L と、この 15 分間に泉からわき出した水 △ L×15 とをあわせた量と、同じであったことになります。これを式で表すと次のようになります。

(□ L×4)×15＝☆ L＋△ L×15

８台のポンプの時は 7 分間で泉の水が空になりました。８台のポンプで 7 分間にくみ出した水の量は(□ L×8)×7 ですが、これが、もともと泉にあった水☆ L と、この 7 分間に泉からわき出した水 △ L×7 とをあわせた量と、同じであったということになります。これを式で表すと次のようになります。

(□ L×8)×7＝☆ L＋△ L×7

泉の水に関わるようすが、だいぶイメージできてきました。

上の２つの式で、(□ L×4)×15＝□ L×(4×15)＝□ L×60 であり、(□ L×8)×7＝□ L×(8×7)＝□ L×56 であることに目を向けると、２つの式を次のようにとらえなおすことができます。

□ L×60＝☆ L＋△ L×15

□ L×56＝☆ L＋△ L×7

上の式は下の式に比べると、□ L が 4 (=60－56)だけ多く、△ L は 8 (=15－7)だけ多いことがわかります。ここから、□ L の 4 つ分と、△ L の 8 つ分が等しいことになります。これは、1 台のポンプが 1 分間でくみ出す水の量の 4 倍が、1 分間にわき出した水の量の 8 倍と等しいことを示しています。つまり、1 台のポンプが 1 分間でくみ出す水の量□ L は、1 分間にわき出した水の量の 2 倍、つまり△ L×2 に等しいということになります。

場面のイメージがかなりふくらんできたので、求めたい 5 分で泉を空にする場合を考えてみます。

もともと泉にある水の量はもちろん☆ L で同じですが、泉からわき出る水の量は△ L×5 となります。上の２番目の式に「△ L×7」がありましたが、△ L×5 は

これより△ L×2 だけ少ない量です。しかも△ L×2 は□ L に等しいのでした。ここから､5 分間で水を入れる場合､わき出す水の量は､ちょうどポンプが 1 分間でくみ出す水の量だけ少なくてすむことがわかります。

２番目の式｢□ L×56＝☆ L＋△ L×7｣では､わき出す量が△ L×7 だったので､ポンプは 1 分間にくみ出す量の 56 倍である□ L×56 だけくみ出す必要があったのですが､5 分の場合には､わき出す水の量が､ちょうど 1 台のポンプが 1 分間にくみ出す量□ L だけ少なくてすむので、55 倍である□ L×55 ですむはずです。

5 分間で、 1 台のポンプが 1 分間でくみ出す水の量□ L の 55 倍の量をくみ出すためには、ポンプは 11 台必要となります。(□ L×11)×5＝□ L×55 ということです。

ポンプが水をくみ出すようすや、泉から水がわき出てくるようすを考えながら､泉の水の増減をイメージすることで､そしてそのイメージを少しずつふくらませていくことで、求めたい情報を得ることができました。

この問題は、泉からわき出す水のために、くみ出さなければならない水の量が、どんどん変わるところにむずかしさがあります。ただそこで見方を整理して、結局、

・ポンプがくみ出した全部の量

と

・もともと泉にあった水とくみ出している間にわき出した水を
　あわせた量

が等しくなるようすとして、イメージを少しずつふくまらせていったことが､解決に向かう手がかりになりました。

チャレンジ編

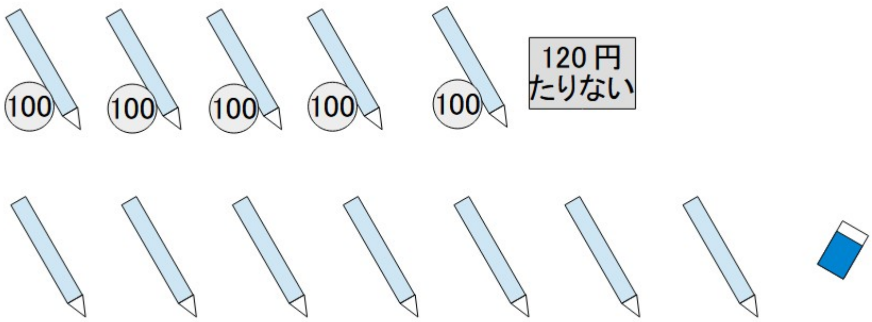
ここまでの考え方を生かして、ちょっとむずかしい問題にもチャレンジしてみましょう。

> 問題：１本 ☐ 円のペンを５本買おうと思ったところ、持っていたお金では120円たりませんでした。
>
> そこで買おうと思っていたペンよりも100円安いペンを7本と60円の消しゴムを1個買ったら、代金がちょうど持っているお金と同じになりました。
>
> もともと買おうと思っていたペンの値段は１本いくらですか。
>
> (灘中学校2024年)

安い方のペンが最初買おうと思っていたペンより<u>100円安い</u>ことからイメージをふくらませると、最初に買おうと思ったペンは安い方のペンより<u>100円高い</u>、と考えることができます。

さらにイメージをふくらませると、安い方のペンと100円をセットにすると、最初に買おうと思っていたペンの値段と同じになります。

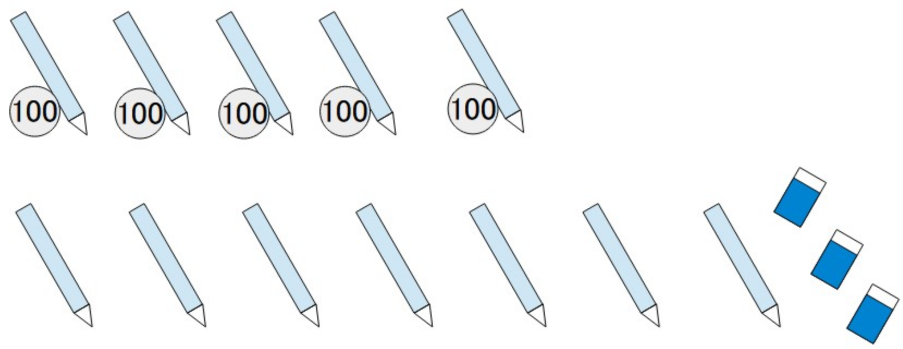
ここまでのイメージを表すと、次のようになります。



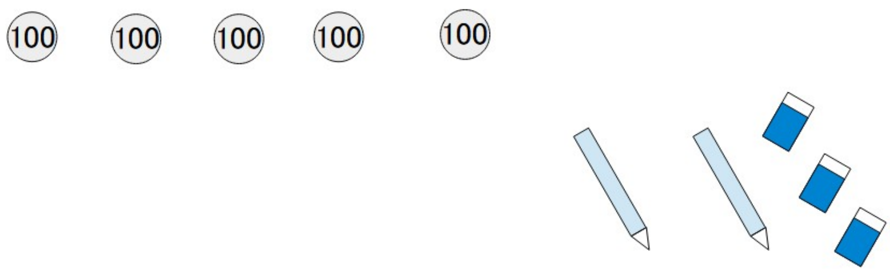
下の段は持っていたお金の金額と同じになります。上の段の時は120円たりないのですから、ペンと100円のセットが５セットの金額は、持っていたお金の金額より120円多いことになります。

そこで、下に120円を追加すると、上の段の金額と同じになるはずです。さらに消しゴムが60円であることに目を向けると、この120円は消しゴム２個分の

値段です。そこで、下の段に消しゴム２個を追加すると、上の段の金額と等しくなることがわかります。



　この２つを見くらべると、次の図の上の段と下の段の金額が等しいことがわかります。



　つまり、安い方のペン２本と消しゴム３個の値段が 500 円ということです。
　ここで消しゴムは１個 60 円でしたから、消しゴム３個の値段は 180 円です。したがって安い方のペン２本の値段は 320 円ですから、安い方のペン１本の値段は 160 円とわかります。
　もともと買おうと思っていたペンはこれより 100 円高いので、260 円ということになります。

　実際、160 円のペン７本と 60 円の消しゴム１個の代金は 1180 円です。一方で、260 円のペン５本の代金は 1300 円ですから、確かに 1180 円しか持っていなければ、120 円たりないことになります。

　場面のイメージをふくらませていく中で、金額の関係に気づくことができました。

問題：A 町と B 町を結ぶ道があります。この道を何台ものバスが A 町から B 町に向かう方向に一定の速さで、一定の間隔で走っています。

アイさんが同じ道を A 町から B 町に向かう方向に一定の速さで自転車で走ったら、バスに 20 分ごとに追い越されました。

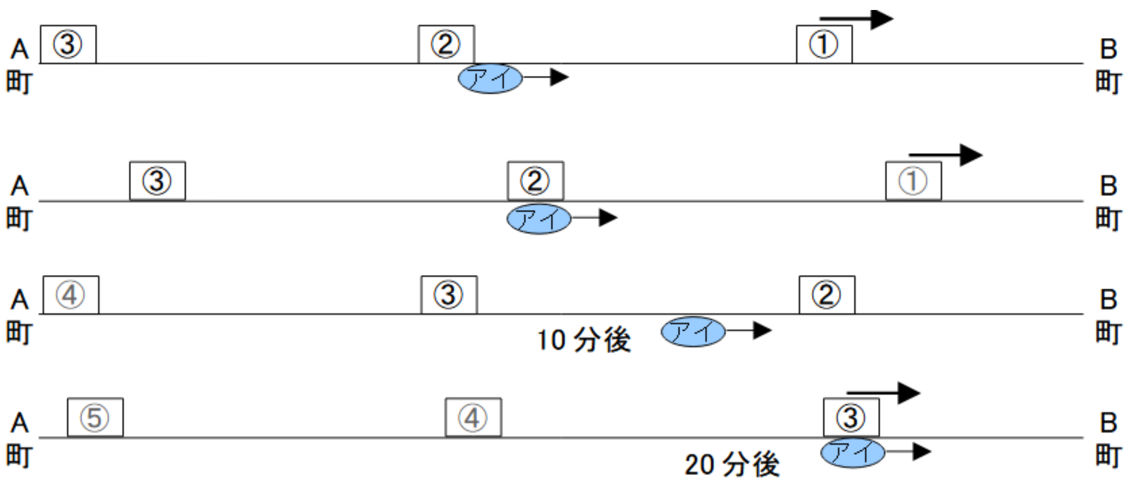
アイさんがそのままの速さで、走る方向だけ反対に変えたら、今度は 10 分ごとにバスに出会いました。

その後、アイさんが速さを時速で 6 km だけ上げたところ、バスには 9 分ごとに出会うようになりました。

バスとその次のバスは、何 km の間隔をあけて走っているのでしょうか。ただし、バスと自転車の長さは考えないものとします。

(灘中学校 2024 年)

アイさんは自転車で走っていて、バスは一定の間隔でどんどん走っているという場面です。どうしたらよいかすぐにわからない時は、まずは場面をイメージしてみるのでした。そこで、最初のアイさんがバスと同じ向きに走っているようすをイメージすると、例えば次のようになります。

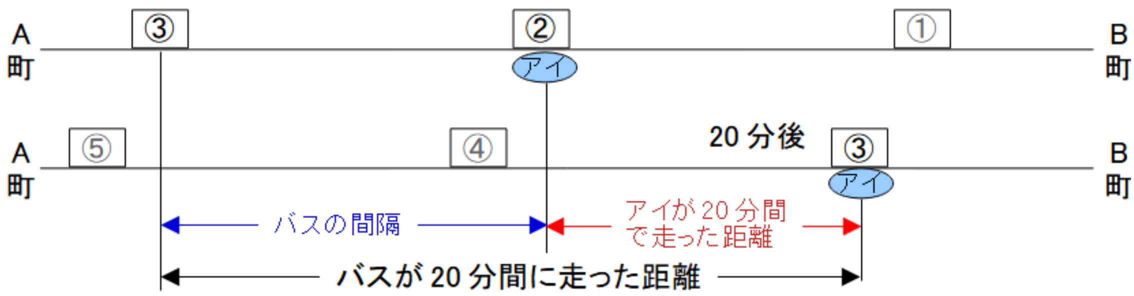


アイさんが②のバスに追い越されてから、ちょうど 20 分後にその次のバス③

に追い越されています。

ここからイメージをふくらませることはできるでしょうか。

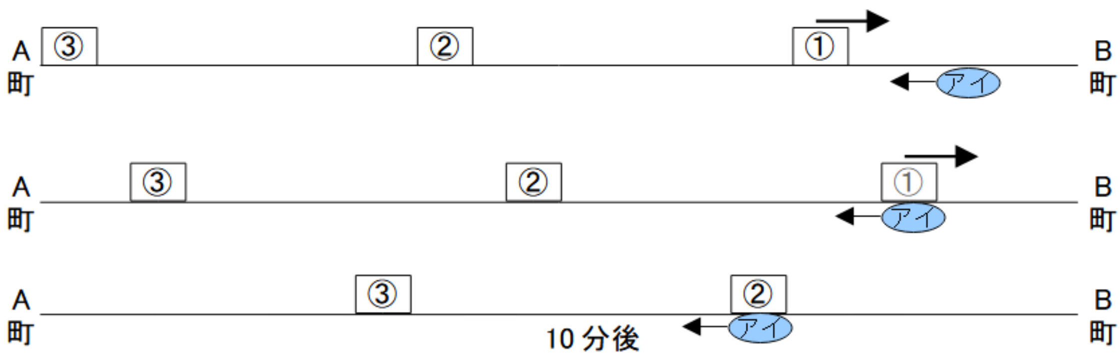
20 分後に③のバスに追い越されるので、③のバスの動きに着目してみると、次のようなことに気づきます。



③のバスは、アイさんが②のバスに追い越されてから 20 分後にアイさんを追い越すので、この 20 分間に③のバスが走る距離は、バスどうしの間隔に、アイさんが 20 分間で走る距離を加えた距離になります。

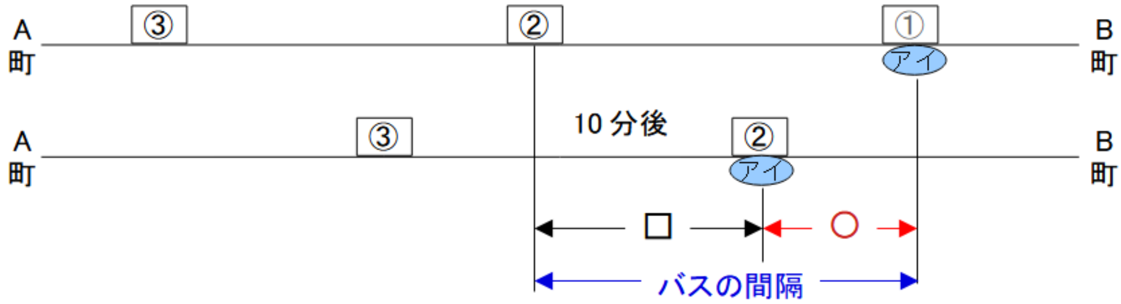
バスの間隔についてのイメージが少しできてきました。ただ、それが何 km なのかは、これだけでは求まりそうもありません。アイさんが反対方向に走る場合については「6 km」という数値の情報がありますので、そちらから何 km かを求める手がかりが得られるかもしれません。

そこで、次に、アイさんが反対方向に走る場合も、イメージしてみます。



アイさんは①のバスと出会ってから 10 分後に、次の②のバスと出会っています。

この場合についても、②のバスの動きと、②のバスと①のバスの間隔に着目してイメージをふくらませてみると、次のようになります。



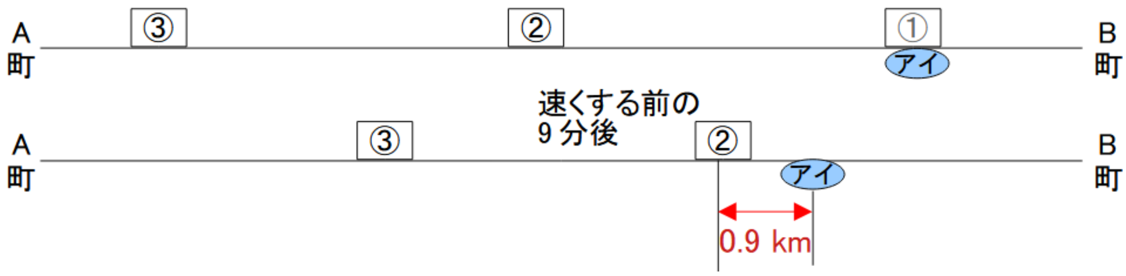
図で□は 10 分間でバス②が走った距離を、○は 10 分間でアイさんが走った距離を表しています。今度は、バスの間隔が、バス②が走った距離にアイさんが走った距離をくわえたものになっています。

「6 km」の情報を使いたいので、さらに、アイさんが走る速さを早くした場合も考えて、このことからイメージをふくらませてみます。

時速を 6 km 速くしたら 9 分間でバスと出会うということは、この 9 分間の間にアイさんがそれだけ長い距離を走ったので、出会う時間が 1 分間短くなったということです。アイさんがどれだけ長い距離を走ったのかなら、時速 6 km の情報から求められそうです。

時速 6 km ということは、分速に直すと 0.1 km です。つまり分速 0.1 km だけ速く走ったことになります。その速さで 9 分間走ったので、9 分間では 0.9 km だけ前の時より長く走ったことがわかります。

逆に言えば、6 km 速くする前の速さの時には、9 分間だとこの 0.9 km 分がたりていなかったことになります。つまり、アイさんがバス①で出会ってから 9 分後にはまだバス②と出会ってないのですが、その時のバス②とアイさんの間の距離が、この 0.9 km のはずです。



10 分後には上のようにバス②とアイさんは出会います。つまり 9 分後から 10 分後までの 1 分間に、バスとアイさんはあわせて 0.9 km だけ進んだのです。

ここからバスとアイさんがそれぞれ1分間でどれだけ進んだかはわからないものの、両者はあわせて1分間に0.9 kmだけ進んでいたことはわかりました。「6 km」の情報を利用することで、かなりイメージがふくらみました。あと一歩です。

前ページの上の図のイメージから、バスの間隔は、□＋○、つまりバス②が10分間で走った距離に、アイさんが10分間で走った距離を加えたものでした。これは、バスが1分間に走る距離とアイさんが1分間に走る距離をたして、それを10倍した距離と同じになると考えられます。

バスが1分間に走る距離とアイさんが1分間に走る距離をたした距離は0.9 kmであると、上でわかりました。したがって、両者があわせて10分間に走る距離は、0.9×10＝9で9 kmとなります。そして、これがバスの間隔でしたから、この9 kmが求めたかった答えになります。

上のように、問題の中の情報を参考にしながら場面のイメージをふくまらせていく中で、場面のようすが少しずつわかると、そこからどのような距離に着目したらよいか、それはどのような計算で求まるかが見えてきます。

なお、この問題では、実は答えを求めるために同じ方向で走る時の情報は使わずに答えが求まるようです。場面をていねいに見ていくと、どの情報がどのように答えにつながっているかがわかり、そうしたことにも気づきます。

ただし、アイさんとバスのそれぞれが10分間でどれだけ走ったかを求めるには、同じ方向で走っている時の情報も使います。

バスが20分間に走る距離は、バスどうしの間隔に、アイさんが20分間で走る距離を加えた距離でした。一方、バスの間隔はバスが10分間で走る距離(□)とアイさんが10分間で走る距離(○)を加えた距離でした。

バスが20分間に走る距離は、10分間に走る距離(□)の2倍であり、アイさんが20分間に走る距離も、10分間に走る距離(○)の2倍です。

ここから、今の場面のようすを式で表すと、次のようになります。

バスが 20 分間に走る距離
＝バスどうしの間隔＋アイさんが 20 分間で走る距離
＝(バスが 10 分間で走る距離＋アイさんが 10 分間で走る距離)
＋アイさんが 20 分間で走る距離

□や○を使って書き直すと次のようになります。

□×2＝(□＋○)＋○×2
□×2＝□＋○×3
□＝○×3

つまり、10 分間でバスはアイさんの 3 倍の距離を走ることがわかります。

□＋○はバスの間隔に等しく 9 km でした。□は○の 3 倍なので、□＋○は○の 4 倍です。つまり、○の 4 倍が 9 km なので、○は $\frac{9}{4}$ km となります。また□は○の 3 倍なので、$\frac{27}{4}$ km です。

このように、同じ方向に走っている時の情報と、反対向きに走っている時の情報を組み合わせると、アイさんとバスがそれぞれ 10 分間でどれだけ走っているのかまで求めることができます。

数や図形についての問題

何かを分けたり、買ったり、走ったりという問題では、「場面のようすをイメージする」ことも考えやすかったのですが、数だけ、図形だけの問題だと、場面のようすをイメージするとはどんなことか、がわかりにくいかもしれません。

そこで、最後に、そうした数の問題や図形の問題をいくつか考えてみます。それらを考える中で、こうした数や図形の問題でも、「場面のようすをイメージする」という方針で、少しずつですが、解決にせまっていくことができることを確認したいと思います。

> 問題：３つの整数 2342、2894、3561 を、1 以外の整数 ア で割るとあまりがどれも イ になります。ア 、イ にあてはまる数を答えましょう。
>
> (フェリス女学院中学校 2023 年)

３つの数を同じ数で割ったら、どれもあまりが同じになった、という場面です。この場面のイメージから、イメージをふくらませてみましょう。

ただ、もとの数が大きいので、イメージをふくらませる手がかりをさがすために、もっと小さい数で、同じようなことを考えてみます。

例えば、３つの数を 3 で割ったら、どれもあまりが 2 になった、という場面だと、どのようになるでしょうか。

3 の倍数に 2 をたした数を考えてみると、こうした数として、例えば、「5、8、11」が考えられます。これらの数から、イメージのふくらませ方についてのヒントを得てみます。

これらは「3×(ある数)＋2」という形になっています。5＝3×1＋2、8＝3×2＋2、11＝3×3＋2 です。なので、このうちのある数から別の数をひくと、あまりの「＋2」の部分が消えて、3 の倍数の部分だけ残ります。

実際、8－5＝3、11－8＝3、11－5＝6 となり、どれも差は 3 の倍数です。さらに、差に表れた 3 の倍数どうしをひき算しても、その差はやはり 3 の倍数になります。実際、6－3＝3 となっています。

これは、この3つの数だけの話ではなく、3で割ると2あまる数であれば、どんな数の間にも言えそうです。例えば、383、584、650はいずれも3で割ると2あまる数ですが、それらの差を求めると、以下のようになります。

584－383＝201　　650－584＝66　　650－383＝267

これらはいずれも3の倍数になっています。

さらに、これらの差でつくられるひき算をしても、差は3の倍数になります。

201－66＝135　　267－66＝201　　267－201＝66

こうした観察から、問題に出てきた３つの数でひき算を作ると、その差は ア の倍数になっていると考えられます。

そこで問題の３つの数でひき算を作り、それらの差を観察します。

2894－2342＝552　　3561－2894＝667　　3561－2342＝1219

これらはすべて ア の倍数のはずです。つまり ア はこれらの公約数です。しかし、552や667は1219を割り切ることはできないようなので、公約数はもっと小さい数とわかります。

そこで、さらにこれらの数でひき算を作り、その差を観察してみます。例えば、667－552の差も ア の倍数になるはずで、またこの差は作られるひき算の差の中では一番小さそうなので、まずこれを求めてみます。

667－552＝115

115が5の倍数であること、つまり5が115の約数であることはすぐわかります。また115÷5＝23なので、23も115の約数です。しかし、552や667、1219は5の倍数ではありませんから、23がこれら３つの数の公約数である可能性だけが残ります。

確かめてみると、

552÷23＝24　　667÷23＝29　　1219÷23＝53

となり、23がこれら３つの数を割り切ることがわかります。つまり ア は23とわかります。

そこでもとの３つの数2342、2894、3561をそれぞれ23で割ってみると、次のようになります。

$2342 \div 23 = 101$　あまり 19

$2894 \div 23 = 125$　あまり 19

$3561 \div 23 = 154$　あまり 19

これらの結果から、共通のあまりである $\boxed{イ}$ は 19 とわかります。

今回は、もとの３つの数 2342、2894、3561 についてのイメージをどうふくらませるかがよくわからなかったので、まずはイメージをふくらませる方針をさがすところから始めました。しかし、もしもこうした場合に、出てきた数の差を求めるとよいことを知っているならば、ひき算を用いることに気づき、もっと手早くイメージをふくらませることができるでしょう。

ただ、少し時間がかかったとしても、イメージをふくらませることを目指して考えを進めていけば、こうした少しむずかしい問題でも、答えにたどりつける可能性はあるのです。

問題：長方形 ABCD の辺 AB、BC、CD、DA 上にそれぞれ点 E、F、G、H をとって、AE＝3 cm、BF＝18 cm、CG＝7 cm、DH＝12 cm となるようにします。EG と FH の交点を P とする時、三角形 PFG と三角形 PHE の面積がどちらも 90 cm^2 となりました。

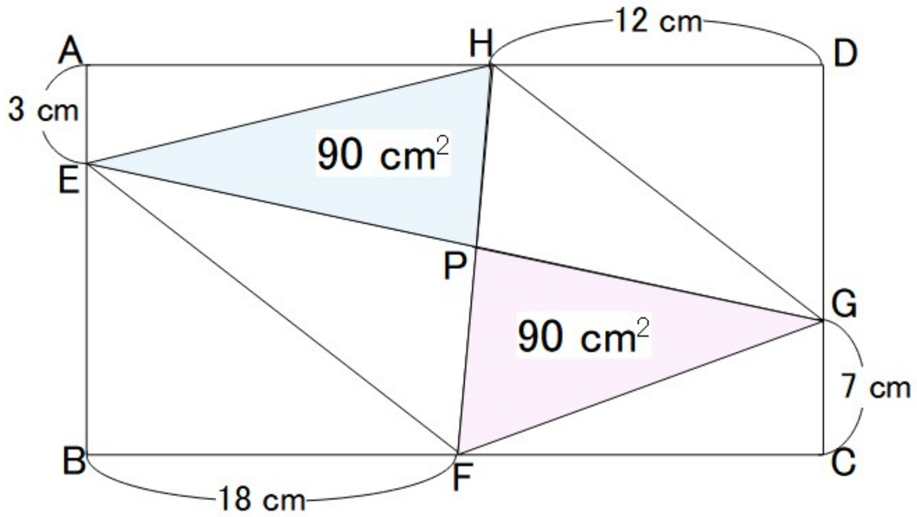
このとき、DG の長さと長方形 ABCD の面積をそれぞれ求めなさい。

(甲陽学院中学校 2023 年)

まずは図形を実際にかいてみて、問題で示された場面の様子をイメージし、それを出発点として、少しずつイメージをふくらませてみます。

ただ、点 E などの位置は AE＝3 cm という条件からわかるのですが、しかし長方形の辺自体の長さはわかりません。そもそも CD の一部である DG の長さを求めるよう問われているということは、CD の長さ自体はすぐには求まらないのだと考えられます。

そこで、わかっている条件はちゃんと成り立つようにした上で、長方形の辺の長さは、とりあえず“てきとう”にとって図をかいてみることにします。



これが最初の場面のイメージになります。ここから、示された情報をもとにイメージをふくらませていきます。

四角形 ABCD が長方形なので、次のことはわかります。

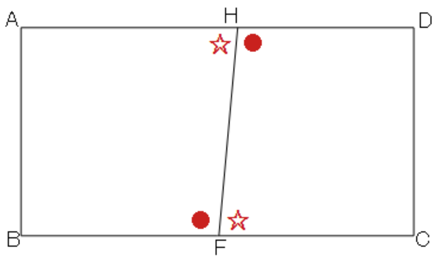
※１ ：４つの頂点のところの角は直角

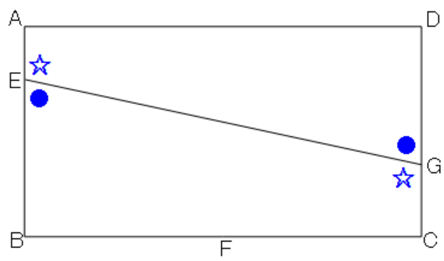
※２ ：向かう合う辺の長さは等しい（AB と DC、AD と BC）

※３ ：向かい合う辺はたがいに平行（AB と DC、AD と BC）

※１から四隅の三角形が直角三角形とわかるので、面積が求めやすそうに思います。しかし、AH や BE の長さがわからないので、すぐには求められそうにありません。また※２から辺の長さの情報をふやせないかと思うのですが、やはり辺の一部の長さしかわからないので、すぐには情報をふやすのはむりそうです。

※３はどうでしょう。例えば、AD と BC が平行ですが、間に HF という線が交わっています。4 年生で学習した、平行な線とそれらに交わる直線でできる角の大きさのことを思い出すと、下の左の図で同じ印をつけた角の大きさが等しいことがわかります。





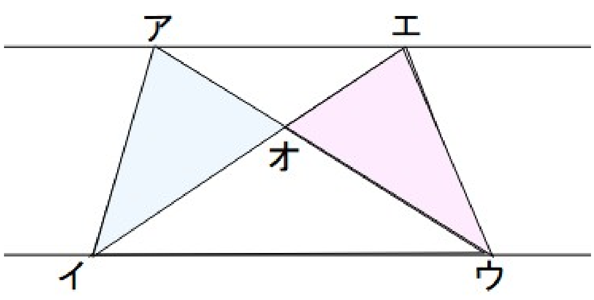
また AB と DC が平行であることに目を向けて同じように考えると、上の右の図の同じ印をつけた角の大きさも等しいとわかります。

ABCD が長方形であることから、少しだけイメージがふくらみました。

それでは、三角形 PFG と三角形 PHE の面積がどちらも 90 cm^2 という情報からは、イメージをふくらませることができないでしょうか。

こうした向かい合う三角形の面積が等しいというようすは、下のような形で見たことがあるかもしれません。

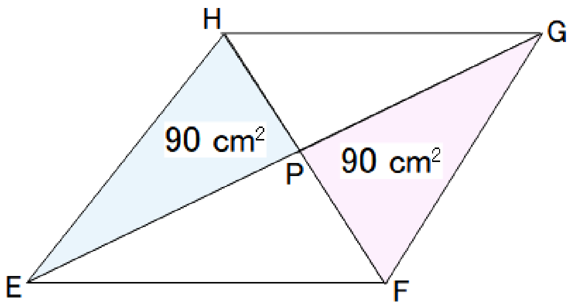
（参考：平成 22 年度全国学力・学習状況調査算数Ｂ・問題４）

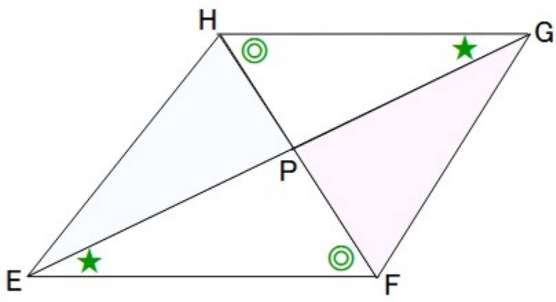


平行な２直線の間に三角形アイウと三角形エイウがあると、高さが等しいので三角形アイウの面積と三角形エイウの面積が等しくなります。そして、それぞれの面積から三角形オイウの面積をひくと、三角形アイオと三角形エウオの面積も等しいとわかるのでした。

今の場面では逆に、青とピンクの三角形の面積が等しいことがわかっているので、三角形オイウにあたる三角形をそれぞれにプラスしてあげると、それらの面積も等しくなり、したがって、２つの三角形の高さが等しくなると言えるのではないでしょうか。

そこで、今の場面のうち、このことに関係する部分だけをぬき出してみると、下の左の図のようになります。

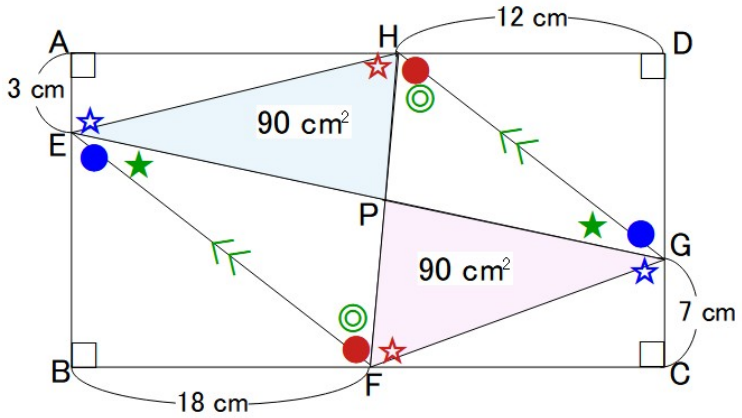




面積が 90 cm² とわかっている２つの三角形に、それぞれ三角形 PEF をプラスした三角形 HEF と三角形 GEF も面積は等しくなります。そしてこれらの三角形は底辺が EF で同じなので、高さが等しいとわかります。そこから、<u>HG と EF は平行</u>であるとわかります。

ここで、また４年生で学習したことを思い出すと、上の右の図の同じ印をつけた角の大きさも等しくなっていることがわかります。そして、６年生の拡大図・縮図で学習したことを思い出すと、三角形 PEF が三角形 PGH の拡大図になっていることもわかります。

新しくふくらませたイメージにもとづいて図をかきなおしてみると、次のようになります。図の中の「<<」は平行であることを表しています。



ここで、BF と EF で作られる角を見てみると、●から◎をひいた大きさになっています。同じように、DH と GH で作られる角を見てみると、やはり●から◎をひいた大きさになっています。つまり、これら２つの角は大きさが等しいことがわかります。

ここで前に見た※１を思い出すと、三角形 EBF と三角形 GDH は、２つの角の大きさが等しいので、三角形 EBF が三角形 GDH の拡大図になっていることがわかります。そして、DH＝12 cm なのに対して BF＝18 cm なので、1.5 倍の拡大図であることもわかります。

ですから、EF の長さも GH の長さの 1.5 倍ですし、EB の長さも DG の 1.5 倍ということになります。

求めたい DG の長さについての情報が得られました。これと、わかっている情報を合わせて、さらにイメージをふくらませてみます。

※２から AB の長さと DC の長さは等しいのでした。DC の長さは DG の長さに 7 cm を加えた長さです。一方、AB の長さは DG の長さの 1.5 倍に 3 cm を加えた長さです。ということは、DG の長さの 0.5 倍に 3 cm を加えた長さと 7 cm が等しいことになります。つまり、DG の長さの 0.5 倍は 4 cm です。ここから DG の長さは 8 cm とわかり、求めたい１つの量を求めることができました。

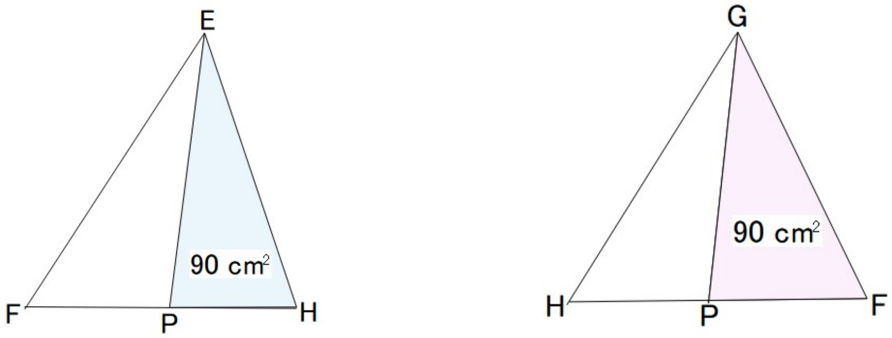
あとは、長方形 ABCD の面積を求めたいのですが、今のところ、面積についてわかっているのは、まず三角形 PFG と三角形 PHE の面積がどちらも 90 cm² ということです。また、DG の長さが 8 cm とわかり、EB の長さはその 1.5 倍の 12 cm とわかりますから、直角三角形 EBF と GDH の面積がそれぞれ 108 cm² と 48 cm²

であることもすぐに求まります。

三角形PEFと三角形PGHは、まだ面積はわかりませんが、三角形PEFが三角形PGHの拡大図になっていたことはわかっていました。しかも先ほどEFの長さもGHの長さの1.5倍であることもわかりましたから、三角形PEFは三角形PGHの1.5倍の拡大図ということになります。

ここから、<u>FPはHPの1.5倍の長さ</u>であり、<u>EPはGPの1.5倍の長さ</u>であることもわかります。

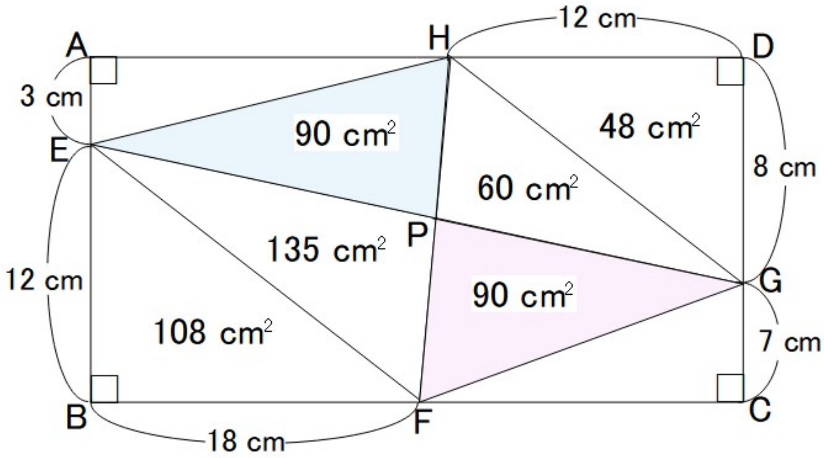
ここで面積がわかっている三角形PHEと、面積を知りたい三角形PFEを考えてみます。この2つだけ取り出すと、下の左の図のようになります。



このように見ると、三角形PFEは、高さが三角形PHEと等しく、底辺の長さが三角形PHEの1.5倍ということです。ですから、その面積も三角形PHEの1.5倍ということになり、90×1.5＝135から135 cm^2とわかります。

三角形PFGと三角形PGHについても同じように考える(上の右の図)と、今度は三角形PFGの底辺の方が三角形PGHの底辺の1.5倍です。つまり、三角形PGHの面積を1.5倍すると三角形PFGの面積である90 cm^2になるということです。したがって、三角形PGHの面積は90÷1.5＝60で60 cm^2となります。

ここまでわかった面積を図にまとめてみると、次のページの図のようになります。面積の点でも、だいぶイメージがふくらんできました。あと頂点Aのところと頂点Cのところの直角三角形の面積がわかれば、全体の面積がわかります。



AH や CF の長さがわかれば残った直角三角形の面積も求まりますが、その長さは、やはりすぐには求まりそうもありません。また三角形 PHE と三角形 AEH を、三角形 PFE の時のように結びつけることもできなさそうです。

はっきりした方針が見えないので、ここまで何度も使ってきた、次のようなイメージのふくらませ方をしてみます。まだわかっていない量を□を用いて表しておいて、場面のようすをとりあえず表現してみるということです。

ここで四角形 HFCD に目をむけると、※３で見たように AD と BC が平行でしたから四角形 HFCD は台形です。そしてその面積のうち、三角形 GCF の分以外は、48＋60＋90＝198 より 198 cm² とすぐ求まります。

そこで FC の長さを“とりあえず”□ cm と表すと、三角形 GCF の面積は□×7÷2 で求まりますから、台形 HFCD の面積は次のようになるはずです。

台形 HFCD の面積＝(□×7÷2)＋198
＝□×3.5＋198

一方で、台形 HFCD の面積は、高さにあたる DC の長さが 8+7=15 で 15 cm とわかりますから、FC の長さ□ cm を用いて、次のようにも考えることができます。

台形 HFCD の面積＝(12＋□)×15÷2
＝(12＋□)×7.5
＝12×7.5＋□×7.5
＝90＋□×7.5

□×3.5＋198 と 90＋□×7.5 はどちらも台形 HFCD の面積なのですから、等しいはずです。２つの式をみくらべると、□の 4 つ分が 108 に等しいことがわかります。ここから□は 27 となります。つまり、FC の長さは 27 cm です。

FC＝27 cm なので、BC＝45 cm です。長方形 ABCD はたての長さが 15 cm、横の長さが 45 cm ということになり、その面積は 15×45＝675 から 675 cm^2 であると求まります。

もちろん台形 AHFB に目を向けて考えても、AH の長さが 33 cm と求まり、同じ結果が得られます。

基本の問題にくらべると、はるかに長い道のりでした。
ただ、道のりは長いのですが、やっていたことは基本の問題の時と同じことです。最初の場面のイメージから出発して、少しずつイメージをふくらませていくということです。
もちろんコツのようなものを知っていれば、もっとはやく、少ない手順で答えを求めることはできます。しかし、そうしたコツを知らなくても、まったく手出しができないわけではありません。まずは、場面のイメージを作り、それを少しずつふくらませることを試してみて下さい。

おわりに

　場面のある問題の時は、それを式でどう表すことができるのかをさぐるために、まずは場面のイメージをつかむこと、それですぐには式での表し方がわからない時は、イメージを少しふくらませることを考えてきました。

　問題を見てすぐに式が立つ場合は、そのようなまわりくどいことをする必要は、もちろんありません。しかし、式が思いつかない時や、式は思いうかぶものの自信がない時は、イメージを作ることで、場面と式とのつながりが見えてくることも多くあります。

　また、こうした式の立て方は、中学校で文字式を学習すると、使える式のレパートリーがふえて式の表現力が増すので、さらに実行しやすくなります。このパワーアップした表現力を生かしたのが方程式です。

　ですから、方程式を立てる時も、場面のイメージをつかむと考えやすくなります。その意味で、こうした文章題の考え方は、そのまま方程式を利用するときにも使える考え方だと言えます。