中学校３年生向け
無理数学習のためのわりきり

上越教育大学
布川　和彦

中学校 3 年生になると無理数というものを学習します。主に出てくるのは $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ といった根号のついた“数”です。“数”だと教科書には書いてあるのですが、何となくしっくりこないという人もいるかもしれません。特に無理数を小数で表すと「循環しない」無限小数になると言われると、変な感じがします。

実際、中学生の中には、次のような疑問を持っている人もいるようです。

・ $\sqrt{2}$ cm だと 1.414･･･ずっと数が続くのに、１辺の長さと考えてよいの？
・ $\sqrt{2}$ などを無理数として認めているが、本当に数として認めてよいの？
・ $\sqrt{2}$ ＋ $\sqrt{3}$ は本当にできるの？
・ $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ だと言うけど、そもそも終わりのない数と終わりのない数を“かける”ことができるの？

このような疑問に接すると、 $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ などは本当に数なのか自信がなくなりそうです。そこで、ここでは、とりあえず中学校 3 年生で無理数を学習するのに役立ちそうな範囲に限って、無理数のことを考え直してみます。

無理数のむずかしさ

無理数のむずかしさは、例えば次のようなところにありそうです。

・「循環しない」無限小数になること。

・$\sqrt{}$という見慣れない記号を用いていること。

この２つのことは、関連していると見ることができます。

(1) ２乗すると 2 になる数を考えたい。

(2) でもそうした数を考えようとすると、「循環しない」無限小数になりそう。

(3) それだと、知っている数(整数、有限の小数、分数)では表せない。

(4) しかたないので新しい記号$\sqrt{}$を用いて表そう。ただ、2 とのつながりがわかるようにしたいので、 $\sqrt{2}$ と表すことにしよう。

このように $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ といった無理数は、それまでの数である有理数だけでは不十分なので、「そうした数もあると考えることにしよう」として数の仲間に採り入れられたものです。ですから、算数で学習した数をイメージすると、無理数が数であることはちょっと変な感じがするかもしれません。しかし中学校 3 年生の学習では、「こうした変なものも、これからは数として考えることになったんだ」とわりきることにしましょう。そうわりきって、まずは $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ などを、数の仲間として受け入れてあげてください。

それでもやはり、「循環しない」無限小数、つまり規則性の見えない数字の並びがずーっと続くようなものを“数”として受け入れるのは不安です。

実際、有理数と無理数をあわせた実数が数学の世界で整備され、不安がとりのぞかれたのも意外とおそく、19 世紀の後半とされています。しかもその整備は、「デデキントの切断」とか「コーシー列」といった少しむずかしい考え方を用いて行われました (興味のある人は、これらの用語を調べてみたり、例えばこのような数学者による実数の解説を参照したりしてみてください)。

ですから、私たちが無理数を受け入れることに不安を感じても、決して不思議ではありません。むしろ、不安に感じる人は数学的なセンスがあると言えるかもしれません。

無限小数を考えようとすると、どうしても「無限」について扱うことになりま

す。数学の世界では無限を扱う方法が整備されていますが、ここではそれをかなりおおざっぱに使って、およその感じだけをつかむことを目指します。それにより、中学校3年生として無理数を学習するための、**とりあえずの安心**を感じてもらおうと思います。ただ無限の扱い方としては、かなりいいかげんですから、きちんと勉強したい人は、この文献など数学者による解説にチャレンジしてみてください。

【補 足】

「無理数」というと、「ムリな数」「ムチャな数」という感じがしますが、そうではありません。この時の「理」は rational、つまり ratio (比)で表すことができる、という意味です。小学校6年生のときに比 $a:b$ を学習し、分数$\dfrac{a}{b}$を比の値と呼ぶことを学習しました。このような分数の形で表すことができる数が rational な数(rational numbers)、つまり有理数です。

分数の形で表すことができない数は irrational な数(irrational numbers)と呼ばれ、これを日本語に訳すと無理数となります。rational の前の ir-は規則的を表す regular に対して不規則的を表す irregular を作るときの ir-といっしょです。

確かに rational には「理にかなった」といった意味もあるので、irrational も「道理に合わない」「不合理な」を意味することもあり、それだと「ムリ」「ムチャ」に近くなります。しかし、数の場合の rational/irrational は分数で表せる／表せないの意味であり、無理数は分数で表せないという意味になります。

無限小数の行き先

1÷9 を計算すると 0.111･･･と 1 がずっと続く無限小数になりそうです。しかし 5 年生の時に学習したことを思い出すと、商を$\frac{1}{9}$と分数で表すこともできました。これを合わせると次のようになります。

$$\frac{1}{9}=0.111\cdots$$

この式の両辺に 9 をかけると左辺は$\frac{1}{9}\times 9$ で 1 になり、右辺は 0.999･･･となると考えられます。したがって、

$$1=0.999\cdots$$

ただ 1 と 0.999･･･が等しいというのは、ちょっと変な感じもします。

この式の「･･･」の部分がくせものです。今の「･･･」は 9 がずっと続いていることを表しています。1 番目である小数第一位も 9、2 番目の小数第二位も 9、3 番目の小数第三位も 9 と続き、小数第十万位も 9、小数第千兆位も 9 であることを表しています。そして、千兆でも終わらず、さらに 9 が続きます。

9 が延々と続く“数”(?)は扱いづらいので、次のように 9 が 1 つずつ追加されていくと考えてみます。

1 番目：0.9

2 番目：0.99

3 番目：0.999

・・・

17 番目：0.99999999999999999

n 番目：$0.\underbrace{999\cdots999}_{n\text{個}}$

この n を限りなく大きくしたのが 0.999･･･であると考えることにします。9 の個数を 1 つずつ増やしているので、途中は 9 がいくつか並んだふつうの小数(有限小数)ですから、少し考えやすくなります。途中の n 番目の状態を考えた上で、n をどんどん大きくしたときにどうなるかを観察することで、0.999･･･について調べてみようという作戦です。なお、「n 番目」だとわかりにくい場合は、n に 3 とか 10 とかを代入して考えてみるとよいでしょう。

ここで 1 と 0.999･･･の差を考えてみます。と言っても 0.999･･･のままだと差をどう求めてよいのかわかりません。そこで、上の作戦を実行してみます。

まず 1 と 1 番目の 0.9 の差を考えると 0.1 となります。1 と 2 番目の 0.99 の差は 0.01、3 番目の 0.999 の差は 0.001 です。1 と 17 番目の 0.99999999999999999 の差は 0.00000000000000001 となるでしょう。このように考えると、1 と n 番目の数との差は次のようになると考えられます。

$$1\text{ と }n\text{ 番目の差：}0.\underbrace{000\cdots000}_{(n-1)\text{個}}1$$

つまり小数点の後に 0 が$(n-1)$個並び、その後に 1 が来るような数です。そして n が大きくなるほど 1 の前の 0 の個数が増えますから、1 との差はどんどん小さくなることもわかります。

0.999･･･が n 番目の数の n を限りなく大きくした場合だと考えると、1 と 0.999･･･の差は逆に限りなく小さくなることがわかります。差が限りなく小さくなるということは、1 とほとんど区別がつかないというイメージです。「1 との差はこれ位かな？」と思っても、「いやいやそれよりもっと小さいですよ」というやりとりがいくらでも続くという感じだと思ってもよいでしょう[1)]。

結局、0.999･･･は 1 と区別がつかないような数だということになります。上で見た数の系列 0.9、0.99、0.999、･･･は徐々に大きくなっていきますが、その行き先は、今のような意味で 1 であると考えることにします。つまり、1＝0.999･･･という式は、数の系列 0.9、0.99、0.999、･･･の行き先が 1 であることを表していると考えることができます。

以下ではこのような数の系列を**数列**と呼ぶことにします。

無理数を考えるときに出てくる無限小数についても、同じように考えることができます。例えば、$\sqrt{2}$ は小数第 200 位まで求めると、以下のようになります。

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073
247846210703885038753432764157273501384623091229702492483605585073721 2
644121497099935831413222665927505592755799950501152782060571 47

もちろんまだまだ続くのですが、これを上の 0.999･･･と同じように数列でと

1) 大学生になると、このやりとりをもっときちんと扱う方法を学習します。

らえ直して見ます。

１番目：1.4

２番目：1.41

３番目：1.414

・・・

50 番目：1.4142135623730950488016887242096980785696718753769４

・・・

0.999･･･のときとはちがい、100 番目の最後の数が何かとか、7253 番目の最後の数が何かとかは、実際に計算してみないとわかりません。ただそれらの数が何かはわからなくても、次のことは言えるでしょう。

・番目が進むほど、少しずつではあるが、数は大きくなっていく。

・ただしその大きくなる大きさは徐々に小さくなっていく。

例えば、2 番目から 3 番目になるときは小数第三位の数が増えるので、増える大きさは 100 分の 1、つまり 0.01 より小さいはずです。実際、2 番目から 3 番目になるときは 0.004 だけ増えていますから、増えた大きさは 0.01 よりは小さくなっています。

しかし 8 番目から 9 番目になるときは小数第九位の数が増えるので、増える大きさは 100000000 分の 1、つまり 0.00000001 より小さいはずです。前のページの数を調べると、その大きさが 0.000000002 であり、0.00000001 より小さくなっていることがわかります。

このように 1.4142･･･を表す数列 1.4、1.41、1.414、1.4142、･･･でも、数は徐々に大きくなっていきますが、ただその大きくなり方は徐々に小さくなっていきます。つまり、増え方の勢いは弱まっていきます。ですから、かなり後の方では、大きくはなっていっても、あまり目立たない程度にしか大きくならないと考えられます。ここから、その数列もどこかに行き先があるのではないかと期待してもよいでしょう。

では、その行き先はどこなのでしょうか？

実はその行き先は、算数で学習してきた数 (正の有理数) の中にはないのです。ただ、その行き先がないままだと、1.4142･･･に当たる部分に穴が空いてしまうこ

とになります。どんどん近づいて行ったら、実はそこは穴になっていたという感じです。どこかに行き着きそうな数列については、できればちゃんと行き先があるようにした方が、数の世界がより完全になりそうな気がします。

　そこでその行き先も“数”であると考えることにして、それを $\sqrt{2}$ というちょっと変わった数字で表すことにしているのです。

　これは分数のときと似ています。3 倍すると 1 になるような数を考えると、

$$0.33333\cdots$$

となってしまいわかりにくいので、これを $\frac{1}{3}$ という (小学校 2 年生や 3 年生にとっては) ちょっと変わった数字で表すことにしたのと同じです。

　このように、行き先がありそうな数列なのに、従来の数の中にはその行き先がないという場合には、行き先を新たな数として付け加えることで、数の集まりの中の「穴」が埋まり、数の集まりは小さい数から大きな数まで、「穴」がなく滑らかに整った状態で続いていくことになります。つまり、数の集まりは「連続 (continuous)」だということになります。また、行き先がありそうな数列にちゃんと行き先があるという意味で、コンプリート(complete)であると言います。

【補 足】

　小学校 5 年生や中学校 1 年生のときに、円周率 π も無限に続く小数であると学習しました。これも上で考えたのと同じように、3.1、3.14、3.141、･･･という数列の行き先を 1 つの数と考えて、それを π という“数字”で表しているのだと考えられます。ギリシア語で円周や周囲を意味する περιφέρεια の頭文字 π を用いることで、円周とのつながりがわかるようにしています。

　円周率の例えば小数第 100 位までだと次のようになります。

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679

これでも最後の 9 はかなり小さい数になりますが、現在も「チュドノフスキーの公式」などを用いて計算が試みられていて、2024 年 6 月には 202 兆桁以上が計算されたそうなので、その最後の数はこれよりはるかに小さい数になります。

無限小数のかけ算

　$\sqrt{2}$ の２乗が２になるというとき、 $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ を考えていることになります。そして $\sqrt{2}$ が無限小数になるとすると、このかけ算は無限小数どうしのかけ算ということになります。このようなかけ算も考えてよいのかどうかも、ちょっと不安になります。かけ算の筆算をしようと思っても、右はしをそろえることができないので、どうやって計算してよいかもわかりません。

　この場合も、無限小数を数の系列として捉え直すことで、少し考えやすくなります。復習しておくと、 $\sqrt{2}$ を表す 1.14142･･･は、次のような数列の限りなく先の方を考えているのでした。

１番目：1.4

２番目：1.41

３番目：1.414

・・・

50 番目：1.4142135623730950488016887242096980785696718753 7694

・・・

そこで、 $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ についても、この系列の１番目どうしのかけ算、２番目どうしのかけ算、３番目どうしのかけ算と考えていき、そのようすを観察します。そして、n 番目どうしのかけ算の　n を限りなく大きくしたときを予想し、それを $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の積と考えることにします。

１番目どうしのかけ算：1.4×1.4＝1.96

２番目どうしのかけ算：1.41×1.41＝1.9881

３番目どうしのかけ算：1.414×1.414＝1.999396

・・・

となっていきます。ちなみに 50 番目どうしのかけ算を計算してみると、次のようになりました。小数第 49 位まで 9 が続いています。

1.99999999999999999999999999999999999999999999999997

71656080961606813043742880457326381198582670837636

$\sqrt{2}$ の数列の 100 番目は

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694

80731766797379907324784621070388503875343276415727

となるので、100 番目どうしをかけると

1.99999999999999999999999999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999999999999999999
00965887578795506493043993124700168091507199370597
52563434713223747479711196309939581844376132938529

となり、小数第 100 位まで 9 になりました。

これらの結果を観察すると、n が大きくなると 9 が続く長さがどんどん長くなりそうです。また前に 0.999･･･＝1 であったことを思い出すと、今の数の系列の行き先は 2 であろうと考えられます。

では $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ ではどうでしょう。

$\sqrt{3}$ は 1.732･･･でしたから、数列に直すと、次のようになります。

１番目：1.7
２番目：1.73
３番目：1.732
・・・
50 番目：1.73205080756887729352744634150587236694280525381038
・・・
100 番目：1.73205080756887729352744634150587236694280525381038
06280558069794519330169088000370811461867572485756
・・・

そこで、 $\sqrt{2}$ の数列の 1 番目と $\sqrt{3}$ の数列の 1 番目のかけ算、2 番目どうしのかけ算、3 番目どうしのかけ算を考えると、次のようになります。

１番目どうしのかけ算：1.4×1.7＝2.38
２番目どうしのかけ算：1.41×1.73＝2.4393
３番目どうしのかけ算：1.414×1.732＝2.449048
・・・

50 番目どうしのかけ算をすると次のようになります。

2.44948974278317809819728407470589139196594748065665
52570754646233169729365616782791430710814337846372

また $\sqrt{2}$ の数列の 100 番目と $\sqrt{3}$ の数列の 100 番目のかけ算をすると次のようになります。

2.4494897427831780981972840747058913919659474806566 7
012843269256725096037745731502653985943310464023 46
5099732572665628054403197306601283787799705404920 0
0618342735971211447013693201997772494068344188461 2

$$
\begin{array}{l}
2.44948974278317809819728407470589139196594748065667\\
\ \ 01284326925672509603774573150265398594331046402346\\
\ \ 50997325726656280544031973066012837877997054049200\\
\ \ 061834273597121144701369320199777249406834418\ 84612
\end{array}
$$

50 番目どうしの積と 100 番目どうしの積を比べてみると、小数第 49 位までの 2.4494897427831780981972840747058913919659474806566 は完全に一致しています。つまり番目が増えても、この部分はもう変わることはなく、確定してしまっているように見えます。ここから、2 つの数列の同じ番目どうしの積が、どこかに行き着きそうな感じがします。こうした積の系列の行き先を考えることが、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ のかけ算を考えることになります。

$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ の積は、教科書でも学習したように、$(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3})^2=6$ となることから $\sqrt{6}$ になると考えられます。

そこで上の行き先が $\sqrt{6}$ になりそうかを確認してみます。 $\sqrt{6}$ を小数の数列で表したとき、その 200 番目は次のようになります。

$$
\begin{array}{l}
2.44948974278317809819728407470589139196594748065667\\
\ \ 01284326925672509603774573150265398594331046402348\\
\ \ 18594601226614189124858865459837757341625783951237\\
\ \ 27855282891274752767657124763010527091177022348131
\end{array}
$$

これを 2 つの数列の 50 番目のどうしの積や 100 番目どうしの積と比べてみます。すると、50 番目どうしの積では小数第 49 位まで、100 番目どうしの積では小数第 99 位まで完全に一致していることがわかります。つまり 100 番目どうしの積は $\sqrt{6}$ を小数で表したものとほぼ等しくなっていて、しかも 50 番目どうしの積よりも $\sqrt{6}$ に近づいています。これらの観察から、2 つの数列の積の行き先は $\sqrt{6}$ であると期待してよさそうです。

このように、無限小数どうしのかけ算については、無限のまま計算をしようとするとわかりにくいので、無限小数を一度、数列の形に直し、それを順にかけていって、その行き先を見極めると考えてみましょう。そう考えることで、無限小

数どうしでも、とりあえずかけ算ができそうだとは感じてもらえるのではないでしょうか。もちろん、人間には最後まで実行することはできないのですが。

無限小数のたし算

$\sqrt{2}$ ＋ $\sqrt{3}$ といった無理数のたし算も、同じように考えることができます。この和については、これ以上、簡単な表し方ができないので、このままでよいのですが、それでも、無限小数どうしをたしてもだいじょうぶなのかが、ちょっと不安になるかもしれません。

この場合も、かけ算のときと同じように、$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ の数列の 1 番目どうし、2 番目どうし、3 番目どうし、･･･のたし算を考えてみます。

１番目どうしのかけ算：1.4＋1.7＝3.1

２番目どうしのかけ算：1.41＋1.73＝3.14

３番目どうしのかけ算：1.414＋1.732＝3.146

・・・

50 番目どうしをたすと、その和は次のようになります。

3.14626436994197234232 913506571557044551247712918732

小数第三位までの 3.146 は 3 番目どうしの和と一致します。ここはもう確定と考えてよいでしょう。

100 番目どうしをたすと、その和は次のようになります。

3.14626436994197234232913506571557044551247712918732
870123248671744266549537090707593153372108489014 83

50 番目どうしの和と比べてみると、小数第 50 位まで完全に一致しますから、ここまでは確定で、この先も変わらないだろうと考えることができます。

このように番目の先に行くと、和の値が徐々に確定していきます。この観察結果から、番目をさらに進めると、和の値はどこかに行き着きそうだと期待できそうです。その行き先が $\sqrt{2}$ ＋ $\sqrt{3}$ の和であると考えることができます。

$\sqrt{2}$ ＋ $\sqrt{3}$ の和は $\sqrt{5}$ とか $\sqrt{6}$ と表すことができないので、上の小数がその和として適切なのかは確かめにくいのですが、例えば、1 つの“実験”として次のようなことを考えることもできます。

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ ですから、上で求めた小数を 2 乗したものが、 $5+2\sqrt{6}$ とほぼ等しくなっているのかを考えてみます。上にあげた $\sqrt{2}$ ＋ $\sqrt{3}$ の数列の 3 番目を用いると、その 2 乗は次のようになります。

$$(3.146)^2 = 9.897316$$

$\sqrt{6}$ を小数第六位まで求めると 2.449489 ですから、これを用いて $5+2\sqrt{6}$ を計算すると、次のようになります。

$$5 + 2 \times 2.449489 = 9.898978$$

２つの結果を比べると、小数第二位まで一致しており、それなりに近い値になっています。

今度は 100 番目の結果を用いてみます。その 2 乗は次のようになります。

$$\begin{aligned}&(3.14626436994197234232913506571557044551247712918732870123248671744266549537090707593153372108489014 83)^2\\&= 9.89897948556635619639456814941178278393189496131334\\&\quad 02568653851345019207549146300530797188662092804689\\&\quad 40983900408361473851929391430636185362148562867154\\&\quad 27485037045260636575372280035745148798587839599289\end{aligned}$$

一方、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ の確認で用いた $\sqrt{6}$ の数列の 200 番目を利用すると、 $5+2\sqrt{6}$ の数列の 200 番目は次のようになります。

$$\begin{aligned}&5+2\times(2.44948974278317809819728407470589139196594748065667\\&\quad 01284326925672509603774573150265398594331046402348185946 0\\&\quad 12266141891248588654598377573416257839512372785528289127 4\\&\quad 7527676571247630105270911770223481 31)\\&= 9.89897948556635619639456814941178278393189496131334\\&\quad 02568653851345019207549146300530797188662092804696\\&\quad 37189202453228378249717730919675514683251567902474\\&\quad 55710565782549505535314249526021054182354044696262\end{aligned}$$

100 番目を考えると、小数第 48 位まで一致しています。ここから、もっと先の番目まで考えると一致度はさらに上がり、結果として $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ の　2 乗と $5+2\sqrt{6}$ は一致すると期待してよいのではないでしょうか。

無理数の入ったたし算では、無限に続く小数が関わることに加え、その答えが $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ という「＋」の残った形になるので、さらに変な感じがするかもしれません。これは、上の行き先がこの他に表しようがないことから、しかたのないことです。無理数はある意味で“新種の数”ですから、これまでの常識が通用しないこともあるとわりきって、その個性を認めてあげてください。

まとめ

無理数が無限に続く小数になると言われると、いろいろ受け入れにくいこともありますが、とりあえずはそれを見慣れた小数の数列としてとらえ直して考えてみましょう。その上で、そのようなちょっと風変わりなものも新種の**“数”として考えることになった**のだと思うことにして、わりきってみてください。そうしたものも数としましょうという、いわば約束ごとです。

ただ数だとやはり計算ができないと困るのですが、数列の行き先に思いをめぐらすことで、かけ算やたし算を考えることができそうでした。同じように考えれば、わり算やひき算も考えることができるでしょう。さらに、無理数の大小比較は、算数で学習した小数の大小比較と同じようにすることができます。

計算ができて大小比較もできるとなると、無理数も、これまで学習してきた整数や小数、分数からなる有理数とまったく変わりません。最初は数として考えることにしたものが、少しずつ数としての性格をそなえ、りっぱな数として一人前になることができたことになります。

その成長した無理数を用いると、多くの２次方程式の解を求めたり、２次関数の交点を求めたりすることができるなど、メリットがいろいろ出てきます。いろいろな場面で無理数を使っていくことで、無理数が数であることが自然に感じられるようになっていくことでしょう。