かなりわりきった

正負の数学び直しテキスト

上越教育大学
布川　和彦

負の数も 4 や 23 や 9.7 などと同じ数なのですが、見なれた数とはちがい数字の前に「－」の記号があるので、わかりにくい感じがします。

実際、負の数は「0 より小さい」という、算数で学習してきた数からするとちょっと変な性質を持っています。多さや大きさを表すのに数を用いてきた経験からすると、「0 より小さい」というのはおかしなことです。

ここでは負の数を「反対向きの量」を表すために“開発する”という立場で、負の数について学んでいきます。「反対向きの量」もいつもの量と同じように数を用いて表したり、計算したりしたいという気持ちを持ち、そうしたことができるためには、負の数という「新たな数」について、表し方の規則や大小関係、計算の仕方をどのように「決める」と、都合よくできそうかと考えていきます。

ですから、負の数について学ぶときは、数についてこれまで学んだこととつじつまがうまく合うようにするには、負の数についての規則を「どう決めたらよいか」という気持ちで、考えてみて下さい。

向きのある量

算数では量というと、個数とか長さ、重さ、面積など、0より大きいものばかりでした。全くなくなっても0ですし、0.2 mmや0.003 gなどが小さいといっても、やはり0よりは大きい量でした。

負の数を学習するにあたっては、量の「向き」を考え、そこから0より小さい量を考えることが出発点となります。0より小さい量を表すために0より小さい数が必要になってきます。

では「0より小さい」量とはどのような量でしょう。

例えば、個数が増えるのと減るのとは反対の変化といえそうです。このとき増える方を標準の向きとすると、減るのはその反対の向きとなります。同じように海面の位置を基準とした時に、その基準から山の頂上までの高さを標準の向きとした時、その基準から海の底までの深さは反対の向きと考えられます。そして標準の向きから見て反対の向きの量は「**0より小さい**」と考えます。つまり、「0より小さい」というのは、標準の向きとは反対方向の量ということです。

これらの向きが反対の量を「５個増える」と「５個減る」や、「1500 m高い」と「1500 m深い」と表してもよいのですが、標準の向きにあわせて「５個減る」や「1500m深い」も「～個増える」や「～m高い」と表せないかと考えた時に用いられるのが**負の数**です。負の数は標準の向きとは反対方向の量、つまり0より小さい量を表すので、負の数も**0より小さい数**だと考えます。

小学校2年までに習う数であれば20 cmとしか表せない長さも、3年で習う小数を用いると0.2 mと表せます。その結果、1 mより短いはしたの長さがある場合も、3 mや15 mと同じように「m」を用いて0.2 mや14.2 mと表せるようになりました。これと同じように、負の数を用いると、反対の向きの量を区別せずに同じように表せるようになります。

ただ量を表すだけだと用途が限られてしまいますので、負の数についても計算の仕方をうまく決めて、もっと役に立つようにしようと思います。その際、標準的な向きの量を表すこれまでの数といっしょに使うことができるように、しかもこれまでの計算と矛盾がないように負の数の計算を決める方がよいでしょう。

負の数の学習は、このように「数の世界」を拡張する過程なのです。

負の数を作る

2 個りんごがのった皿が 3 皿ある時、

$$2\text{ 個}\times 3=(2\times 3)\text{個}=6\text{ 個}$$

として全部の個数を求めることができました。

同じように 3.7 m のひもが 8 本ある時、

$$3.7\text{ m}\times 8=(3.7\times 8)\text{ m}=29.6\text{ m}$$

として全部の長さを求めることもできました。

ここで 2 個という個数を 3 倍することや 3.7 m という長さを 8 倍することを×3 や×8 と表しました。これと同じように、ある量を反対向きの量に変えることを「－1」という記号を用いて、「×(－1)」と書くことにします。

例えば、増えることを標準の向きとした場合に、5 個増えるのと反対向きの量に変えることは

$$5\text{ 個}\times(-1)$$

と書くことにします。また 5×(－1)のことを「－5」と書くことにします。

$$5\text{ 個}\times(-1)=(5\times(-1))\text{個}=-5\text{ 個}$$

これにより「5 個減る」は「－5 個増える」と「増える」で表すことができます。

同様に海面からの上方向の高さを標準の向きとした時に、海面から下方向の深さは反対の向きになります。したがって、山の 1500 m の高さとちょうど同じだけ深い部分の深さは次のようになり、「－1500 m 高い」と表せます。

$$1500\text{ m}\times(-1)=(1500\times(-1))\text{ m}=-1500\text{ m}$$

新しい数のきまり１：反対向きの量に変えることを×(－1)とする。
新しい数のきまり２：5×(－1)を－5 と、1500×(－1)を－1500 と書く。

標準の向きとは反対向きの量を表す際に現れた「－5」や「－1500」のように、これまで学習した数の前に「－」のついた数を**負の数**と呼びます。このときの「－」はひき算の「－」と（とりあえず）区別して「マイナス」と読むことにします。
「－5」なら「マイナス・ご」と読みます。

これまで学習してきた数、例えば 5、1500、7.6、 $\frac{2}{5}$ などは**正の数**と呼びます。

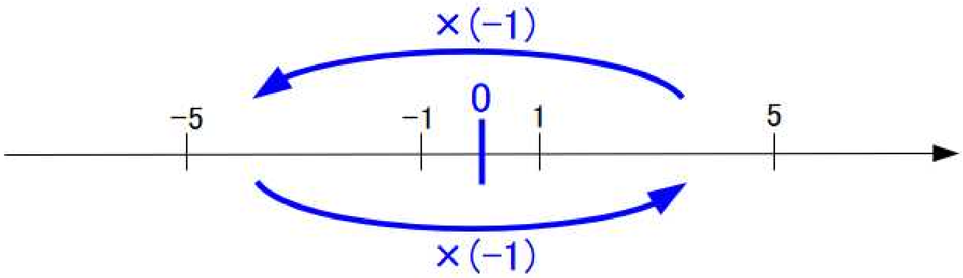
標準の向きと反対の量をさらに反対向きにすることを考えます。すると、

$$-5\text{個}\times(-1)=(\,(-5)\times(-1)\,)\text{個}=(\,5\times(-1)\times(-1)\,)\text{個}$$

一方で、標準の向きと反対の量をさらに反対向きにすると、標準の向きに戻ると考えられます。したがって

$$-5\text{個}\times(-1)=5\text{個}$$

ここから、$-1\times(-1)=1$ と考えるのが自然です。そこで、きまり 1 にしたがって考えると、$-1\times(-1)=1$ と<u>決める</u>のがよさそうです。



同様に高さが標準の向きの時に－1500 m の高さ、つまり 1500 m の深さを反対向きにすると 1500 m の高さになると考えられますが、これはここまでの負の数のきまりとうまく合っています。

$$-1500\text{ m}\times(-1)=(\,1500\times(-1)\times(-1)\,)\text{ m}=(1500\times1)\text{ m}=1500\text{ m}$$

負の数の大小比較

算数では 2 つの数のどちらが大きいか、小さいかを比べることができました。負の数をこれまでの数(正の数)といっしょに使うためには、負の数についても大小を比べることができるようにしておきます。

－1 は向きを反対にする働きでした。そこで、大きい量ほど反対にした時には逆に小さくなる、つまり大きい量を×(－1)した量の方が小さい量を×(－1)した量より小さくなる、と考えるのが自然です。そこで次のように<u>決めることにします</u>：$-a$ と $-b$ の大小は、$a>b$ の時 $-a<-b$、$a<b$ の時 $-a>-b$。

このことは「負の数では 0 から離れている数ほど小さい」ということもできます。上の数直線に出ている数では、次のような大小の関係になります。

$$-5<-1<0<1<5$$

また－1500 は－5 よりもさらに小さい数となります。

「マイナス」と「ひく」の関係

「−5」は「−」と「5」のセットで1つの数を表します。ですからこの時の「−」はひき算の記号とは別のものです。しかし「マイナス」と「ひく」には、ちょっとした関わりもあります。

5で表される量を反対向きにした量を表す数が−5でしたから、−5は0から5だけ小さい数になっています。7より5小さい数を7−5で求めたことを思い出すと、0より5小さい数は0−5で求められると考えるのが自然です。つまり−5(マイナス5)は0−5 (ゼロ・ひく5)の答えになっていると考えられます。

$$-5=0-5$$

このように「マイナス」と「ひく」はある程度たがいに関係していますし、だからこそ、同じ「−」という記号で表してだいじょうぶなのだともいえます。

負の数は数なのか？

算数での学習を思い出すと、0より小さい“数”といわれると、とても変な感じがして、−5や−1500といった負の数は本当に数なのか、と思ってしまうかもしれません。そう感じるのは、実はもっともなことなのです。昔の人たちも0より小さい数を数として認めてよいのかどうかなやみ、それを数として受け入れるのにとても長い時間がかかったとされるからです。

ただ、負の数も数として<u>とりあえず認めてみる</u>と、以下で見るように、これまでの数と負の数をいっしょにあつかうことができるように、計算の仕方を<u>決めることができます</u>。しかも負の数の決め方から、たがいに反対向きとみなす量を区別することなく、数を用いていっしょに表すことができ、しかも負の数と正の数のまじった計算をして新たな情報を得ることもできます。

例えば、表計算ソフトでいろいろな項目について前の月より増えたか減ったかを記録する際に、負の数を使えば「増加」の欄だけ作り、減ったときは負の数で記録しておけばよく、いちいち「増加」「減少」などの印を付ける必要はなくなります。しかも数として計算もできますから、増減全体の傾向をそのままソフトで計算させて調べることもできます。プログラミングでも同様です。

数の世界を負の数にまでひろげると利点があることは、負の数を“数”として受け入れる理由の一つといえます。

負の数の計算に関するきまり

負の数どうし、あるいは負の数と正の数の大小をどのように決めるかは、上で考えました。負の数が数となるためには、四則計算もできる必要があります。

負の数をふくむ計算については、次のきまりにもとづいて決めていきます。

新しい数のきまり３：負の数をふくむ計算は、これまでの数の計算とまったく同じようにできる。

例えば小学校4年で

２３×４＋１７×４＝（２３＋１７）×４

として計算をくふうするやり方を学習しました。こうしたやり方は負の数がふくまれる式でも使えると決めることにします。このやり方を「４でくくる」と呼ぶことにします。２３×４と１７×４に共通する「４」でひとつにまとめているからです。

また小学校2年で学習した「3つ以上の数をたすときにたす順序を変えても和は同じになる」ことも、負の数の場合に使えると決めることにします。

負の数の加法

（１）負の数と負の数をたす

$-5+(-3)$を考えてみます。

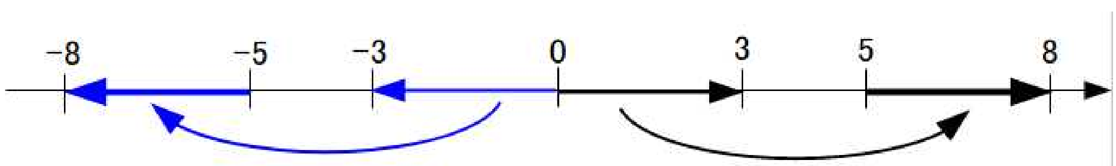
このたし算をどのように決めるのが自然でしょうか。

きまり２から、-5は$5\times(-1)$、-3は$3\times(-1)$です。このことと上の**きまり３**のことを使って -1 でくくると、次のように計算できるはずです。

$$-5+(-3)=5\times(-1)+3\times(-1)=(5+3)\times(-1)=8\times(-1)=-8$$

同じように考えると$-a+(-b)=-(a+b)$と決めるのが自然のようです。

これは下の図で、5の先に3の長さをつなげるように、-5の先に-3をつなげることにあたりますから、正の数の加法と同じようになっているとわかります。



（２）負の数と正の数をたす

まず$-5+5$をどう決めたらよいでしょう。-5は$5\times(-1)$で、5で表される量を反対向きにした量を表していました。5個増えることと5個減ることをあわせたら変化なし、つまり0個の変化と考えるのが自然です。ここから、-5と5をあわせたら0になると決めるのが自然です：$-5+5=0$。同じように考えて

$$-a+a=0$$

と決めることにします。

次に$-9+7$を考えてみます。（１）でやったことを思い出すと、

$$-9=-2+(-7)$$

と分解できます。**きまり３**をつかってたす順序を変えてもよいとすると、

$$-9+7=(-2+(-7))+7=-2+((-7)+7)=-2+0=-2$$

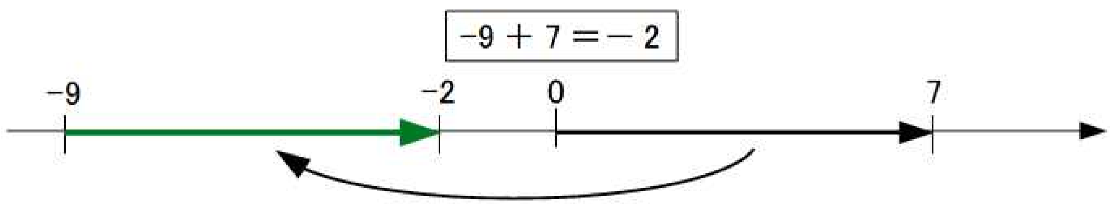
となるはずです。ここで上で決めた$(-7)+7=0$を使っています。

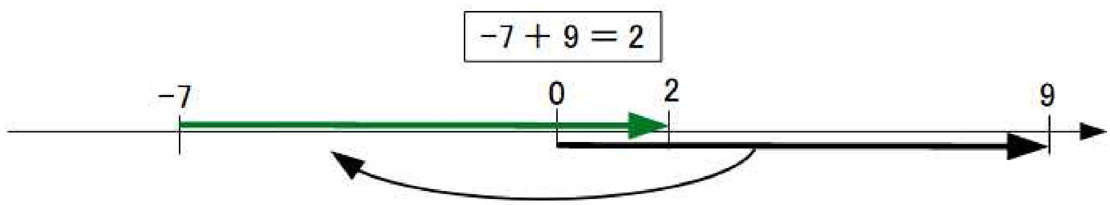
では$-7+9$はどう計算したらよいでしょう。この場合は、9の方を分解することを考えます：$9=7+2$。

$$-7+9=-7+7+2=(-7+7)+2=0+2=2$$

このように、負の数と正の数をたす場合は、$-a+a=0$となる組合せ、つまりちょうど相殺（キャンセル）される組合せを作るとよさそうです。

これは下の図で、相殺したときに、たりなかったり、はみ出したりした長さが加法の答え（和）になっていることにあたります。





$-a+b$について上のように相殺すると、$a>b$の時は$a-b$だけマイナスとなり、$a<b$の時は$b-a$だけプラスとなります。

負の数の減法

（１）負の数をひく減法

5－(－3)のように負の数をひくときは、どのようになるでしょう。

ここで算数の学習を思い出すと、3－3 は 0 ですし、7.6－7.6 も 0 になります。つまり、ある数から同じ数をひくと 0 になりました。

きまり３により、負の数についても正の数と同じように計算できるようにひき算を決めるとすると、やはりある負の数から同じ負の数をひくと 0 になると考えるのが自然です。そこで、

$$-3-(-3)=0$$

$$-7.6-(-7.6)=0$$

と決めることにします。

ここで今度は、負の数と正の数をたすことを思い出すと、3＋(－3)＝0 でした。これらを組み合わせると、負の数をひく減法は次のようになります。

$$5-(-3)=5+0-(-3)=5+3+(-3)-(-3)=5+3$$

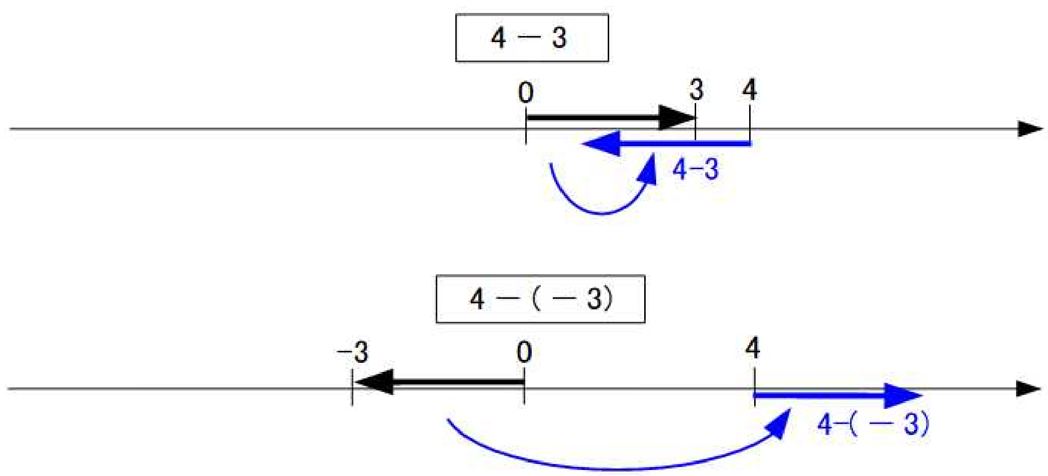
$$-2.4-(-1.8)=-2.4+0-(-1.8)=-2.4+1.8+(-1.8)-(-1.8)=-2.4+1.8$$

同じように考えると

$$a-(-b)=a+b+(-b)-(-b)=a+b$$

となります。つまり $-b$ をひくと、b をたすのと同じことになります。

このことは、下の図で減法ではひく数を反対向きにしてたすという、算数で学習したひき算のイメージとも合っています。



（２）正の数をひくひき算

負の数を作ってきたことで、算数で学習したひき算も新たに捉え直すことができます。例えば7－4も（１）のように考えることもできます。

$$7-4=7+0-4=7+(-4)+4-4=7+(-4)$$

同じように考えると、

$$a-b=a+(-b)+b-b=a+(-b)$$

となります。つまり、正の数をひく減法は、負の数をたす加法として捉え直すことができます。

特に2－6のようにひかれる数がひく数よりも小さい場合でも、次のようにして答えを負の数として求めることができるようになります。

$$2-6=2+(-6)=2+(-2)+(-4)=-4 \quad (-6=-2+(-4)\text{を利用})$$

算数の学習では、2－6のようにひかれる数がひく数よりも小さいひき算は考えませんでした。数の世界を負の数にまでひろげると、このような減法でも答えを示すことができます。小学校5年で2÷3の商を分数で表すこと、つまり数の世界を分数にまで拡げるとどんな除法でも答えを表すことができることを学習しました。負の数を考えることは、減法について同じように可能性を広げてくるのです。そしてこうした可能性を持つことも、負の数を考える利点の一つです。

（３）差を求めるひき算

高さが3776 mの山の頂上と、2400 mにある五合目の間の高さの差は何mでしょうか。この差を求めるには、ひき算を用いて、次のように計算しました：3776－2400＝1376。ここから1376 mの高さの差があることがわかります。

ではこの3776 mの山の頂上と、その山の近くにある湾の一番深い部分の深さ2500 mとの差はどうなるでしょう。一番深いところから3776 mの高さまで垂直に線をのばしたと考えると、その線の長さが頂上と深いところの差になりそうです。したがって、その差は3776＋2500を計算して6276 mとなります。

ここで深さ2500 mを高さ－2500 mと考えると、頂上と五合目の高さの差と同じようにひき算で求めることもできるはずです。そこで次のように計算すると、

$$3776-(-2500)=3776+2500$$

となり、同じ結果になります。この意味でもつじつまが合っています。

かっこの前が「－」の時の分配法則

算数では $4\times(23+17)=4\times23+4\times17$ などの計算のきまりを学習しました。これを使うと、例えば次のように計算することができました。

$$
\begin{aligned}
1.02+4\times(0.25+0.02)&=1.02+4\times0.25+4\times0.02\\
&=1.02+1+0.08
\end{aligned}
$$

では、この 4 や 0.02 の前の「＋」が「－」だったらどうでしょう。

$$1.02-4\times(0.25-0.02)$$

ここで上で決めてきた、正の数を引く減法を負の数をたす加法に直すことを思い出して見ます。それによると、「-4」は「$+(-4)$」に、「-0.02」は「$+(-0.02)$」に直して計算することができました。そこで、上の計算は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
1.02-4\times(0.25-0.02)&=1.02+(-4)\times(0.25+(-0.02))\\
&=1.02+(-4)\times0.25+(-4)\times(-0.02)\\
&=1.02+(-1)+0.08
\end{aligned}
$$

ここで 1 行目から 2 行目では**きまり３**を思い出して $4\times(23+17)=4\times23+4\times17$ と同じ計算のきまりを、負の数の場合も使っています。

かっこの前が「－」だと、かっこのはずし方でなやむこともありますが、負の数をつかって「＋」に変えることで、算数と同じように計算しやすくなります。

正の数と負の数

ここまでで負の数についても加法や減法を決めることができ、しかも正の数といっしょにあつかうことができるようになりました。一人前になってきた負の数と算数で学習してきた正の数とをいっしょにあつかう時に、正の数であることを明確にしたいことも出てくるでしょう。

そこで、ここからは正の数であることを明確にしたい場合は、負の数に「－」をつけるのと同じように、数字の前に「＋」をつけて表すことにします。例えば 13 や 7.2、$\frac{2}{5}$ が正の数であることを明確にしたい時には、$+13$、$+7.2$、$+\frac{2}{5}$ と書て、「プラス 13」などと読むことにします。

もちろん、正の数については「＋」がついてもつかなくても、特にちがいはありません。他の人や自分に対して、正の数であることを明確にしているだけです。

加法にそろえること

上で計算の仕方を考えてきた時のことをふりかえると、負の数どうしをたしたり、正の数どうしをたしたりすることが、一番シンプルでわかりやすいようです。実は幸いなことに、ここまでの学習を組み合わせると、加法と減法がまじった式も加法だけに直すことができますし、**きまり３**でのべたように、負の数が入っていても算数での計算と同じようにできるとすると、正の数の加法だけを集めたり、負の数の加法だけを集めたりできます。

例えば次のような計算を考えてみます：9＋(−7)−4−(−5)。

正の数をひく減法は負の数のたす加法として計算できました：−4 →＋(−4)

負の数をひく減法は正の数をたす加法として計算できました：

−(−5)→＋(＋5)

したがって上の式は以下のように加法だけの式に直すことができます。

$$9+(-7)-4-(-5)=(+9)+(-7)+(-4)+(+5)$$

さらに正の数の加法を集め、負の数の加法を集めると以下のようになります。

$$(+9)+(-7)+(-4)+(+5)=(+9)+(+5)+(-7)+(-4)$$

ここで(＋9)＋(＋5)＝＋14、(−7)＋(−4)＝−11 ですから、結局、最初の式は次のように計算して答えを求めることができます。

$$\begin{aligned}9+(-7)-4-(-5)&=(+9)+(-7)+(-4)+(+5)\\&=(+9)+(+5)+(-7)+(-4)\\&=+14+(-11)=+3\end{aligned}$$

小学校 6 年の時に小数と分数の乗法や除法がまじった式について、小数を分数に直し、さらに分数でわる除法を逆数をかける乗法に直すことで、分数の乗法だけの式に直すことを学習しました。正の数と負の数の加法や減法がまじった式については、加法だけの式に直すことができます。

負の数の乗法

（１）負の数に正の数をかける乗法

-3×4 のように負の数に正の数をかけることは、どのように決めたらよいでしょうか。

$-3=3\times(-1)$であったことと、**きまり３**を思い出すと、次のように考えることができます。

$$-3\times4=3\times(-1)\times4=3\times4\times(-1)=12\times(-1)=-12$$

同じように考えると

$$-2.8\times4.5=2.8\times(-1)\times4.5=2.8\times4.5\times(-1)=12.6\times(-1)=-12.6$$

このように、負の数に正の数をかける乗法は、これまでのことを用いると次のように決まります。

$$-a\times b=a\times(-1)\times b=a\times b\times(-1)=-(a\times b)$$

（２）負の数をかける乗法

$4\times(-3)$も（１）と同じように考えてみると、$-3=3\times(-1)$でしたから、

$$4\times(-3)=4\times3\times(-1)=12\times(-1)=-12$$

となります。これは（１）で考えた$(-3)\times4$の積と同じで、かけられる数とかける数を入れかえても積が同じになりますから、**きまり３**もまもられています。

では$(-5)\times(-3)$のように、かけられる数も負の時はどうなるでしょう。この時も$-5=5\times(-1)$であることに注意し、**きまり３**を思い出すと、

$$(-5)\times(-3)=5\times(-1)\times3\times(-1)=5\times3\times(-1)\times(-1)=15\times1=15$$

となります。途中で-1が２回出てくるので、それらをかけあわせることで１になってしまうのです。同じように

$$-6.2\times(-4.5)=6.2\times(-1)\times4.5\times(-1)=6.2\times4.5\times(-1)\times(-1)=27.9\times1=27.9$$

となります。

このように負の数をかける乗法は次のように決まります。

$$a\times(-b)=a\times b\times(-1)=-(a\times b)$$

$$-a\times(-b)=a\times(-1)\times b\times(-1)=(a\times b)\times(-1)\times(-1)=(a\times b)\times1=a\times b$$

負の数をかけることの意味

小学校2年では「いくつ分」を求める計算として乗法を学習しました。また2つ分や3つ分を2倍、3倍ということも学びました。

では負の数をかける場合の乗法は、何を求めているのでしょうか。乗法が何倍かを求めるということを考えると、－3をかけるのは－3倍を求めることだ、となります。

－3倍とはなんでしょう。もともと、ある量を反対向きの量に変えることを「－1」という記号を用いて「×(－1)」と書くことにし、3×(－1)のことを－3と書いたのでした。したがって、－3倍とはある量を3倍した後に反対向きの量に変えるような操作と考えることができます。

例えば18 mの高さであれば、その－3倍は、まず18 mを3倍して54 mとし、それを反対向きに変えますから54 mの深さ、つまり－54 mの高さとなります。これは上で18×(－3)＝－54と計算したことと合っています。

負の数を用いると、向きをもった量をあつかえるようになりましたが、その際には乗法も矛盾なく考えることができるということです。

負の数をかける回数

上の（１）と（２）の結果をまとめてみると、次のようになります。

$$-a\times b=-(a\times b)$$
$$a\times(-b)=-(a\times b)$$
$$-a\times(-b)=a\times b$$

かけ算の中に－1が1回出てくると積は負の数になりますが、－1が2回出てくると－1×(－1)＝1なので正の数になります。

同じように考えると、2つ以上の数をかけあわせる時、

・式中の負の数が奇数個なら、積は負の数

・式中の負の数が偶数個なら、積は正の数

となります。

この性質は、負の数を含む乗法を計算した時に、答えの確認をしたり、答えを予想したりする際に役立ちます。

負の数の除法

（１）負の数を正の数でわる除法

$-12 \div 3$ のように負の数を正の数でわる除法は、どのように決めればよいでしょう。

$12 \div 3$ について思い出してみると、この除法の答えは 3 倍して 12 になる数でした。実際、$12 \div 3 = 4$ ですが、この 4 を 3 倍すると $4 \times 3 = 12$ となっています。

きまり３で負の数が入った計算もこれまでの計算と同じようにできることにしていましたから、負の数をわる除法 $-12 \div 3$ でも同じように、3 倍して -12 になる数を求めると決めればよさそうです。

では 3 倍して -12 になるのはどのような数でしょうか。

まず 3 をかけて負の数になるので、この数は負の数であるとわかります。そこでこの数を $-c$ と表してみると、$-c \times 3 = -(c \times 3) = -12$ なので、$c \times 3 = 12$ であるとわかります。そして $c = 12 \div 3$ ですから、結局、次のようになります。

$$-12 \div 3 = -(12 \div 3) = -4$$

同じようにに考えると、負の数を正の数でわる除法は次のように<u>決まります</u>。

$$-a \div b = -(a \div b)$$

（２）負の数でわる除法

それでは $12 \div (-3)$ のように負の数でわる除法はどのように決めればよいでしょう。これも（１）と同様に考えれば、-3 倍して 12 になる数を求めることだと決めるのがよさそうです。

-3 倍して正の数 12 になるので、今度の答えも負の数でなければなりません。そこでこの数をまた $-c$ と表してみると、$-c \times (-3) = c \times 3 = 12$ なので、$c \times 3 = 12$ であるとわかります。そして $c = 12 \div 3$ ですから、結局、次のようになります。

$$12 \div (-3) = -(12 \div 3) = -4$$

同じように考えると、負の数でわる除法は次のように<u>決まります</u>。

$$a \div (-b) = -(a \div b)$$

最後に $-12 \div (-3)$ のように負の数を負の数でわる除法はどのように決めればよいでしょうか。

-3倍して-12になる、つまり負の数になるので、この答えは正の数でなければなりません。そこでこの数cと表してみると、$c\times(-3)=-(c\times3)=-12$なので、$c\times3=12$であるとわかります。そして$c=12\div3$ですから、結局、次のようになります。

$$-12\div(-3)=12\div3=-4$$

同じように考えると、負の数を負の数でわる除法は次のように決まります。

$$-a\div(-b)=a\div b$$

負の数と分数

負の分数ももちろん数です。例えば$-\dfrac{3}{5}$は$\dfrac{3}{5}$で表される量と反対の向きをもつ量を表します。$-\dfrac{3}{5}$ mの高さであれば、$\dfrac{3}{5}$ mの高さと反対の向きをもつ高さ、つまり$\dfrac{3}{5}$ mの深さとなります。また$\dfrac{3}{5}=3\div5$でしたから、$-\dfrac{3}{5}=-(3\div5)$と考えることもできます。

それでは、分子に負の数の入った分数、例えば$\dfrac{-3}{5}$はどのような数でしょう。先ほど出てきた$\dfrac{3}{5}=3\div5$と同じように考えると、$\dfrac{-3}{5}$は$-3\div5$の答えになるような数、つまり$\dfrac{-3}{5}=-3\div5$と考えるのが、よさそうです。

ところで$-a\div b=-(a\div b)$と計算することに決めたことを思い出すと、

$$-3\div5=-(3\div5)=-\frac{3}{5}$$

となります。したがって$\dfrac{-3}{5}$は結局、$-\dfrac{3}{5}$と同じ数であることがわかります。

分母に負の数の入った分数、例えば$\dfrac{3}{-5}$はどのような数でしょう。同じように

考えると、$\dfrac{3}{-5}=3\div(-5)$となりますが、$a\div(-b)=-(a\div b)$でしたから、

$$3\div(-5)=-(3\div5)=-\frac{3}{5}$$

となり、$\dfrac{3}{-5}$も$-\dfrac{3}{5}$と同じ数になることがわかります。

結局、負の数で現れる３種類の分数はすべて等しい数であり、単に見え方が異なるにすぎません。

$$-\frac{3}{5}=\frac{-3}{5}=\frac{3}{-5}$$

ですから、この３つの分数は気にせず同じ数として扱ってよく、その時々で扱いやすい形にして考えればよいことになります。

負の数と文字式

aやxなどの文字の入った式では、文字に負の数を代入してももちろんだいじょうぶです。上では分数の分子や分母が負の数になってもだいじょうぶであることを確認しましたので、文字が分子や分母にあるような場合でも、だいじょうぶです。

さらに**きまり３**を考えて負の数についても計算の仕方を決めてきたので、文字に代入するのが正の数でも負の数でもまったく同じように計算できます。したがって、文字に何を代入するのかを気にせず、文字であっても負の数であっても正の数と同じように計算をしていってだいじょうぶなのです。

まとめ

ここでは負の数を、標準の向きと反対の向きの量を表すための数として構成してきました。そのために量を反対向きにする働きを$\times(-1)$としたのですが、その他の計算は基本的に次の３つのことだけで決まっていきました：(i) 正の数と同じようにするという方針（きまり３）；(ii) $(-1)\times(-1)=1$；(iii)$-1+1=0$。

(iii)について本文では$-a+a=0$として確認しました。しかし、$-a=a\times(-1)$であることと$a=a\times1$であることに注意すると、実は(iii)の$-1+1=0$だけで十分です。それは、次のように考えることができるからです。

$$-a+a=a\times(-1)+a\times1=a\times((-1)+1))=a\times0=0$$

要するに負の数を含む式を計算するときには、$(-1)\times(-1)=1$と$-1+1=0$に注意をしていれば、あとは算数で学習してきたのと同じように計算すればだいじょうぶということになります。

大切なのは、負の数を用いることで向きをもった量を効果的に扱うことができたり、どんなひき算でも答えを持つことで数の世界がより自由になることです。負の数を気楽に使って、より豊かになった量の世界と数の世界を楽しんでみましょう。